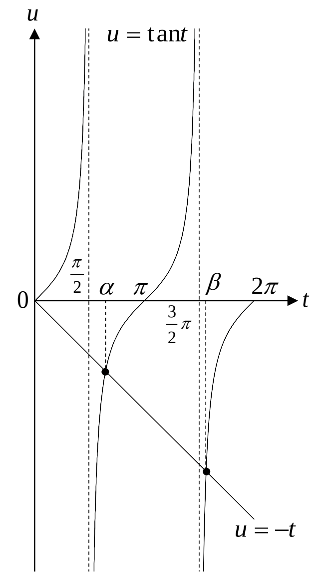
2008 年東大理 $\boxed{6}$



$x=\cos 2t$ より　$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin 2t$

$y=t\sin t$ より　$\dfrac{dy}{dt}=\sin t+t\cos t$　　$t\neq\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$ のとき、$\dfrac{dy}{dt}=\cos t(\tan t+t)$ とすると

$0\leqq t<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi<t\leqq 2\pi$ のとき $\cos t>0$　　$\dfrac{\pi}{2}<t<\dfrac{3}{2}\pi$ のとき $\cos t<0$

右のグラフより、 $\tan t=-t$ となる t が 2 つ存在し、これらを $\alpha,\ \beta$ とすると、

$0\leqq t<\dfrac{\pi}{2},\ \alpha<t<\dfrac{3}{2}\pi,\ \beta<t\leqq 2\pi$ のとき　$\tan t>-t$

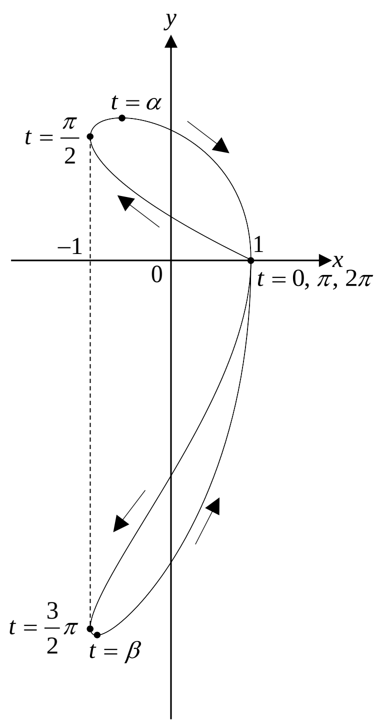
$\dfrac{\pi}{2}<t<\alpha,\ \dfrac{3}{2}\pi<t<\beta$ のとき　$\tan t<-t$

$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき $\dfrac{dy}{dt}=1>0$　　$t=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき $\dfrac{dy}{dt}=-1<0$

以上により、 $x,\ y$ の増減は以下の通り。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	β	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{dt}$	0	−	0	+	+	+	0	−	0	+	+	+	0
$\frac{dy}{dt}$	0	+	+	+	0	−	−	−	−	−	0	+	+
x	1	↘	−1	↗	↗	↗	1	↘	−1	↗	↗	↗	1
y	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗		↘	0	↘	$-\frac{3}{2}\pi$	↘		↗	0

これより、曲線の概形を描くと右図のようになる。



この曲線の、 $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi,\ \pi\leqq t\leqq\dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi\leqq t\leqq 2\pi$ に対応する

y 座標をそれぞれ $y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4$ とすると、 $y_2\geqq y_1\geqq 0\geqq y_3\geqq y_4$ であり、

求める面積は

$$\int_{-1}^{1}(y_2-y_1)dx+\int_{-1}^{1}(y_3-y_4)dx$$

$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}y\left(\frac{dx}{dt}\right)dt-\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}y\left(\frac{dx}{dt}\right)dt+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\pi}y\left(\frac{dx}{dt}\right)dt-\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}y\left(\frac{dx}{dt}\right)dt$$

$$=\int_{0}^{\pi}y\left(\frac{dx}{dt}\right)dt-\int_{\pi}^{2\pi}y\left(\frac{dx}{dt}\right)dt$$

ここで、不定積分$\int y\left(\dfrac{dx}{dt}\right)dt$を求めておく。

$$\int y\left(\frac{dx}{dt}\right)dt=\int t\sin t\cdot(-2\sin 2t)dt=-4\int t\sin^2 t\cos t dt=-4\int t\left(\frac{\sin^3 t}{3}\right)' dt$$
$$=-\frac{4}{3}t\sin^3 t+\frac{4}{3}\int\sin^3 t dt=-\frac{4}{3}t\sin^3 t+\frac{4}{3}\int(1-\cos^2 t)\sin t dt$$
$$=-\frac{4}{3}t\sin^3 t+\frac{4}{3}\left(\frac{\cos^3 t}{3}-\cos t\right)+C=-\frac{4}{3}t\sin^3 t+\frac{4}{9}\cos^3 t-\frac{4}{3}\cos t+C$$

したがって

$$\int_0^{\pi} y\left(\frac{dx}{dt}\right)dt-\int_{\pi}^{2\pi} y\left(\frac{dx}{dt}\right)dt=\left[-\frac{4}{3}t\sin^3 t+\frac{4}{9}\cos^3 t-\frac{4}{3}\cos t\right]_0^{\pi}-\left[-\frac{4}{3}t\sin^3 t+\frac{4}{9}\cos^3 t-\frac{4}{3}\cos t\right]_{\pi}^{2\pi}$$
$$=\left(-\frac{4}{9}+\frac{4}{3}-\frac{4}{9}+\frac{4}{3}\right)-\left(\frac{4}{9}-\frac{4}{3}+\frac{4}{9}-\frac{4}{3}\right)=\frac{32}{9}\quad\cdots\cdots(\text{答})$$

（注）

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=-\frac{\sin t+t\cos t}{2\sin 2t}=-\frac{\sin t+t\cos t}{4\sin t\cos t}=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\cos t}+\frac{t}{\sin t}\right)$$
より、$\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{4}(1+1)=-\frac{1}{2}$ である。