2009年東大理 $\boxed{1}$

(1)

$0<n<m$ のとき

$$ {}_mC_n=\frac{m!}{(m-n)!n!}=\frac{m}{n}\cdot\frac{(m-1)!}{(m-n)!(n-1)!}=\frac{m}{n}\cdot\frac{(m-1)!}{\{(m-1)-(n-1)\}!(n-1)!}=\frac{m}{n}\cdot{}_{m-1}C_{n-1}\quad\therefore n\cdot{}_mC_n=m\cdot{}_{m-1}C_{n-1} $$

m が素数のとき、m と n は互いに素であるから、${}_mC_n$ は m で割り切れる。
${}_mC_1={}_mC_{m-1}=m$ であることから、$d_m=m$ が示された。(証明終)

(2)

$k=1$ のとき　$k^m-k=0$ であるから、d_m で割り切れ、成立。
$k=n$ のとき　n^m-n は d_m で割り切れると仮定する。

$$ (n+1)^m-(n+1)=(n^m-n)+{}_mC_{m-1}n^{m-1}+\cdots+{}_mC_2n^2+{}_mC_1n $$

仮定により、n^m-n は d_m で割り切れる。また、二項係数 ${}_mC_1$, ${}_mC_2$, $\cdots$, ${}_mC_{m-1}$ はすべて d_m で割り切れる。
したがって、$(n+1)^m-(n+1)$ は d_m で割り切れるから、$k=n+1$ でも成立。
以上により示された。(証明終)

(3)

$$ k^m-k=\{(k+1)-1\}^m-(k+1)+1=(k+1)^m-(k+1)+\sum_{n=1}^{m-1}{}_mC_n(k+1)^n(-1)^{m-n}+(-1)^m+1 $$

m が偶数のとき　$k^m-k=(k+1)^m-(k+1)+\sum_{n=1}^{m-1}{}_mC_n(k+1)^n(-1)^{m-n}+2$

(2)より、任意の自然数 k について、k^m-k は d_m で割り切れる。
一方、$(k+1)^m-(k+1)$ は d_m で割り切れる。二項係数 ${}_mC_1$, ${}_mC_2$, $\cdots$, ${}_mC_{m-1}$ はすべて d_m で割り切れるから、
$\sum_{n=1}^{m-1}{}_mC_n(k+1)^n(-1)^{m-n}$ は d_m で割り切れる。k^m-k が d_m で割り切れるには、2 が d_m で割り切れる必要がある。

したがって、d_m は 2 の正の約数であるから、1 か 2 に限られる。(証明終)