2010年東大文$\boxed{2}$

$$f(x+1)=(x^2+2x+1)+a(x+1)+b=x^2+(a+2)x+a+b+1 \quad \text{——①}$$

$$c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)dt=3cx^2\int_0^1 f'(t)dt+4cx\int_0^1 t f'(t)dt$$

$$\int_0^1 f'(t)dt=\left[t^2+at+b\right]_0^1=1+a \qquad \int_0^1 t f'(t)dt=\int_0^1(2t^2+at)dt=\left[\frac{2}{3}t^3+\frac{a}{2}t^2\right]_0^1=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}a$$

$$\therefore c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)dt=3c(a+1)x^2+c\left(2a+\frac{8}{3}\right)x \quad \text{——②}$$

①、②の係数を比較する。

$a+b+1=0$ より　$\therefore b=-a-1$

$3c(a+1)=1$ より　$\therefore c=\dfrac{1}{3(a+1)}$　　$a+2=c\left(2a+\dfrac{8}{3}\right)$ に代入して

$$3(a+2)(a+1)=2a+\frac{8}{3} \quad 9(a^2+3a+2)=6a+8 \quad 9a^2+21a+10=0 \quad (3a+5)(3a+2)=0 \quad \therefore a=-\frac{5}{3},\ -\frac{2}{3}$$

$a=-\dfrac{5}{3}$ のとき　$a+1=-\dfrac{2}{3}$　　$\therefore b=\dfrac{2}{3},\ c=-\dfrac{1}{2}$　　$a=-\dfrac{2}{3}$ のとき　$a+1=\dfrac{1}{3}$　　$\therefore b=-\dfrac{1}{3},\ c=1$

以上により　$\therefore (a,\ b,\ c)=\left(-\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{2}\right),\ \left(-\dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3},\ 1\right)$ ……(答)