

(1)

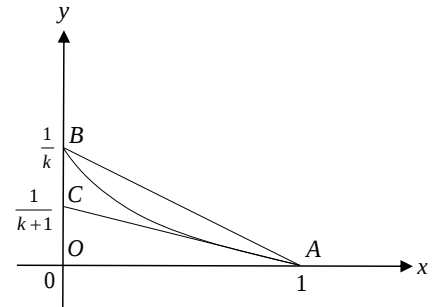
$$f(x) = \frac{1-x}{k+x} = \frac{k+1}{k+x} - 1 \text{ とすると } f'(x) = -\frac{k+1}{(k+x)^2} < 0 \quad f''(x) = \frac{2(k+1)}{(k+x)^3} > 0$$

$0 \leq x \leq 1$ において、 $y = f(x)$ は単調減少かつ下に凸。

$$\text{図の三角形 } OAB \text{ の面積は } \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{2k}$$

$A(1, 0)$ における $y = f(x)$ の接線は $y = -\frac{1}{k+1}(x-1)$ であるから、

$$\text{図の三角形 } OAC \text{ の面積は } \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2(k+1)}$$



したがって、面積の比較から $\therefore \frac{1}{2(k+1)} < \int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx < \frac{1}{2k}$ (証明終)

(2)

$$\int_0^1 \frac{1-x}{k+x} dx = [(k+1) \log(k+x) - x]_0^1 = (k+1) \log(k+1) - (k+1) \log k - 1$$

$$\therefore \frac{1}{2(k+1)} < (k+1) \log(k+1) - (k+1) \log k - 1 < \frac{1}{2k}$$

$$\text{各辺を } k+1 \text{ で割ると } \frac{1}{2(k+1)^2} < \log(k+1) - \log k - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2k(k+1)}$$

$$\frac{1}{2(k+1)(k+2)} < \frac{1}{2(k+1)^2} \text{ より } \frac{1}{2(k+1)(k+2)} < \log(k+1) - \log k - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2k(k+1)}$$

$$\therefore \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2} \right) < \log(k+1) - \log k - \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \text{ ———①}$$

①の各辺の、 $k=n$ から $k=m-1$ までの和をとると

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{m+1} \right) < \log m - \log n - \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{k+1} < \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right)$$

$$\therefore \frac{m-n}{2(m+1)(n+1)} < \log \frac{m}{n} - \sum_{k=n+1}^m \frac{1}{k} < \frac{m-n}{2mn} \text{ (証明終)}$$