

(1)

$$y = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 8}) > \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2}) = \frac{1}{2}(x + |x|)$$

$$x > 0 \text{ のとき } y > \frac{1}{2}(x + x) = x \quad x = 0 \text{ のとき } y = \sqrt{2} \quad x < 0 \text{ のとき } y > \frac{1}{2}(x - x) = 0$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 8} = y - \frac{1}{2}x > 0 \text{ より } \frac{1}{4}(x^2 + 8) = \left(y - \frac{1}{2}x\right)^2 = y^2 - xy + \frac{1}{4}x^2 \quad \therefore y^2 - xy = 2 \quad \text{---①}$$

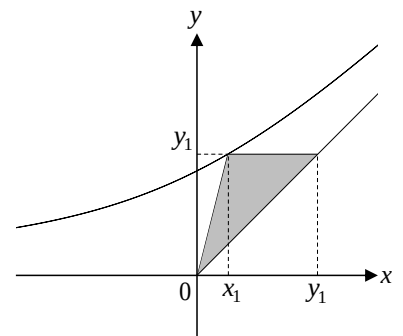
$$y > 0 \text{ より } \therefore x = y - \frac{2}{y} \quad \text{---②} \quad \frac{dx}{dy} = 1 + \frac{2}{y^2} > 0 \quad x \text{ は } y > 0 \text{ について単調増加。}$$

C の概形は右図の通り。 $P_1(x_1, y_1)$ とすると、 $H_1(y_1, y_1)$ とおける。

$$\triangle OP_1H_1 \text{ の面積は } S_1 = \frac{1}{2}y_1(y_1 - x_1) = \frac{1}{2}(y_1^2 - x_1y_1)$$

$$\text{①より } \therefore S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad S_1 \text{ は } P_1 \text{ に関わらず一定である。}$$

したがって、 $\triangle OP_1H_1$ の面積と $\triangle OP_2H_2$ の面積は等しい。(証明終)

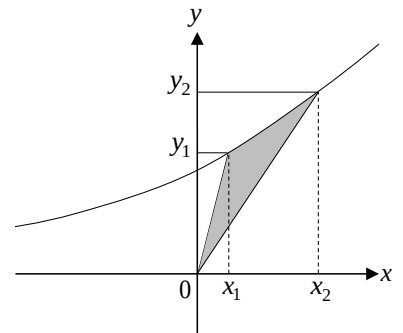


(2)

$0 \leq x_1 < x_2$ のとき ②を用いると、求める面積 S は

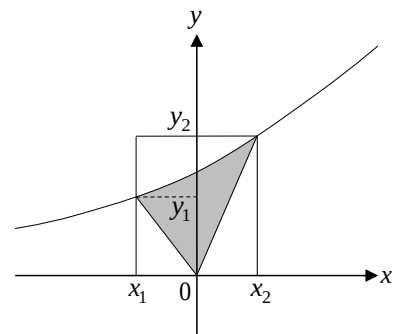
$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}x_2y_2 - \frac{1}{2}x_1y_1 - \int_{y_1}^{y_2} \left(y - \frac{2}{y}\right) dy = \frac{1}{2}x_2y_2 - \frac{1}{2}x_1y_1 - \left[\frac{1}{2}y^2 - 2\log y\right]_{y_1}^{y_2} \\ &= \frac{1}{2}x_2y_2 - \frac{1}{2}x_1y_1 - \left\{\frac{1}{2}(y_2^2 - y_1^2) - 2\log \frac{y_2}{y_1}\right\} \\ &= \frac{1}{2}(y_1^2 - x_1y_1) - \frac{1}{2}(y_2^2 - x_2y_2) + 2\log \frac{y_2}{y_1} \end{aligned}$$

$$\text{①より } \therefore S = 2\log \frac{y_2}{y_1}$$



$x_1 < 0 \leq x_2$ のとき 同様に②を用いると

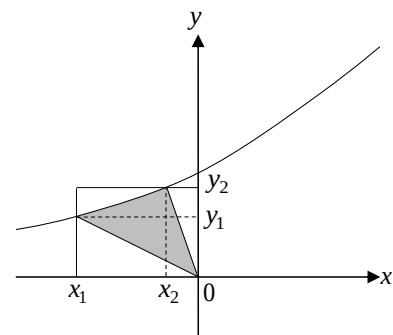
$$\begin{aligned} S &= (x_2 - x_1)y_2 - \frac{1}{2}x_2y_2 - \frac{1}{2}(-x_1)y_1 - \int_{y_1}^{y_2} \left(y - \frac{2}{y} - x_1\right) dy \\ &= \frac{1}{2}x_2y_2 + \frac{1}{2}x_1y_1 - x_1y_2 + x_1(y_2 - y_1) - \int_{y_1}^{y_2} \left(y - \frac{2}{y}\right) dy \\ &= \frac{1}{2}x_2y_2 - \frac{1}{2}x_1y_1 - \int_{y_1}^{y_2} \left(y - \frac{2}{y}\right) dy \end{aligned}$$



$$0 \leq x_1 < x_2 \text{ のときと同じ式であるから } \therefore S = 2\log \frac{y_2}{y_1}$$

$x_1 < x_2 < 0$ のとき 同様に②を用いると

$$\begin{aligned} S &= (-x_1)y_2 - \frac{1}{2}(-x_2)y_2 - \frac{1}{2}(-x_1)y_1 - \int_{y_1}^{y_2} \left(y - \frac{2}{y} - x_1 \right) dy \\ &= -x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_2 + \frac{1}{2}x_1y_1 + x_1(y_2 - y_1) - \int_{y_1}^{y_2} \left(y - \frac{2}{y} \right) dy \\ &= \frac{1}{2}x_2y_2 - \frac{1}{2}x_1y_1 - \int_{y_1}^{y_2} \left(y - \frac{2}{y} \right) dy \end{aligned}$$



$0 \leq x_1 < x_2, x_1 < 0 \leq x_2$ のときと同じ式であるから $\therefore S = 2 \log \frac{y_2}{y_1}$

結局、いずれにしても $\therefore S = 2 \log \frac{y_2}{y_1}$ ……(答)