2010年東大理$\boxed{5}$文$\boxed{4}$共通

$A(1,\ 0)$としても一般性を失わない。

このとき、$P(\cos mt,\ \sin mt),\ Q(\cos t,\ \sin t),\ R(\cos 2t,\ -\sin 2t)$と置ける。

PRが斜辺になるとき、PRは円の直径に一致するから、

$$PR^2=(\cos mt-\cos 2t)^2+(\sin mt+\sin 2t)^2=2-2(\cos mt\cos 2t-\sin mt\sin 2t)=2-2\cos(m+2)t=4$$

$$\therefore \cos(m+2)t=-1 \text{ ——①}$$

$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{OR}$より$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OR}=0$で、$\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t=\cos 3t=0$

$0\leqq 3t\leqq 6\pi$より　$3t=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi,\ \dfrac{11}{2}\pi$　$\therefore t=\dfrac{\pi}{6},\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{7}{6}\pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

①より、$(m+2)t=(2k+1)\pi$と書ける。$3\leqq m+2\leqq 12$より

$t=\dfrac{\pi}{6}$のとき　$m+2=6(2k+1)$

$m+2$は6の奇数倍である。　$m+2=6$　$\therefore m=4\,(k=0)$

$t=\dfrac{\pi}{2}$のとき　$m+2=2(2k+1)$

$m+2$は2の奇数倍である。　$m+2=6,\ 10$　$\therefore m=4\,(k=1),\ 8\,(k=2)$

$t=\dfrac{5}{6}\pi$のとき　$5(m+2)=6(2k+1)$　5と6は互いに素である。

$2k+1$は5の奇数倍であるから、$m+2$は6の奇数倍である。　$m+2=6$　$\therefore m=4\,(k=2)$

$t=\dfrac{7}{6}\pi$のとき　$7(m+2)=6(2k+1)$　7と6は互いに素である。

$2k+1$は7の奇数倍であるから、$m+2$は6の奇数倍である。　$m+2=6$　$\therefore m=4\,(k=3)$

$t=\dfrac{3}{2}\pi$のとき　$3(m+2)=2(2k+1)$　3と2は互いに素である。

$2k+1$は3の奇数倍であるから、$m+2$は2の奇数倍である。　$m+2=6,\ 10$　$\therefore m=4\,(k=4),\ 8\,(k=7)$

$t=\dfrac{11}{6}\pi$のとき　$11(m+2)=6(2k+1)$　11と6は互いに素である。

$2k+1$は11の奇数倍であるから、$m+2$は6の奇数倍である。　$m+2=6$　$\therefore m=4\,(k=5)$

以上により

$$\therefore (m,\ t)=\left(4,\ \frac{\pi}{6}\right),\left(4,\ \frac{\pi}{2}\right),\left(4,\ \frac{5}{6}\pi\right),\left(4,\ \frac{7}{6}\pi\right),\left(4,\ \frac{3}{2}\pi\right),\left(4,\ \frac{11}{6}\pi\right),\left(8,\ \frac{\pi}{2}\right),\left(8,\ \frac{3}{2}\pi\right)\ \cdots\cdots(\text{答})$$