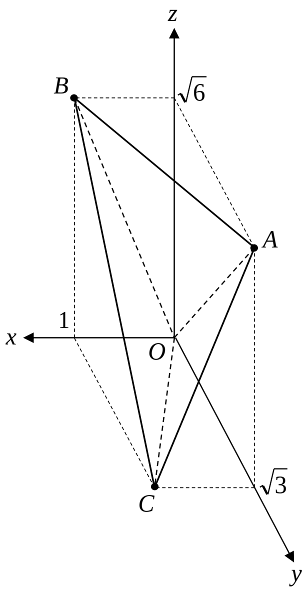
2010年東大理$\boxed{6}$

(1)

$O(0,\ 0,\ 0),\ A(0,\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}),\ B(1,\ 0,\ \sqrt{6}),\ C(1,\ \sqrt{3},\ 0)$ とすると

$OA = CB = 3,\ OB = CA = \sqrt{7},\ OC = AB = 2$

H は L 上にあるから、$\overrightarrow{OH} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} = p\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} + q\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ \sqrt{3}p \\ \sqrt{6}(p+q) \end{pmatrix}$ とおくと、



$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} q-1 \\ \sqrt{3}(p-1) \\ \sqrt{6}(p+q) \end{pmatrix}$ であり、$\overrightarrow{CH}$ は $\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB}$ の両方と垂直であるから

$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OA} = 3(p-1) + 6(p+q) = 9p + 6q - 3 = 0 \quad \therefore 3p + 2q = 1$

$\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{OB} = q - 1 + 6(p+q) = 6p + 7q - 1 = 0 \quad \therefore 6p + 7q = 1$

連立して解くと　$p = \dfrac{5}{9},\ q = -\dfrac{1}{3} \quad \therefore \overrightarrow{OH} = \dfrac{5}{9}\overrightarrow{OA} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ ……(答)

(2)

$P_t(0,\ \sqrt{3}t,\ \sqrt{6}t),\ Q_t(t,\ 0,\ \sqrt{6}t)$ とおけるから　$\overrightarrow{P_tQ_t} = (t,\ -\sqrt{3}t,\ 0)$

(1)の結果より　$\overrightarrow{CH} = \left(-\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{4}{9}\sqrt{3},\ \dfrac{2}{9}\sqrt{6}\right)$

$\overrightarrow{P_tQ_t},\ \overrightarrow{CH}$ に平行なベクトルを、それぞれ $\overrightarrow{k_1} = (1,\ -\sqrt{3},\ 0),\ \overrightarrow{k_2} = (-\sqrt{6},\ -\sqrt{2},\ 1)$ とおく。

$\overrightarrow{k_1} \times \overrightarrow{k_2} = (-\sqrt{3},\ -1,\ -4\sqrt{2})$ であるから、M に垂直なベクトルの1つは $\overrightarrow{k_3} = (\sqrt{3},\ 1,\ 4\sqrt{2})$ とおける。

M の方程式は　$\sqrt{3}x + (y - \sqrt{3}t) + 4\sqrt{2}(z - \sqrt{6}t) = 0 \quad \therefore \sqrt{3}x + y + 4\sqrt{2}z = 9\sqrt{3}t$ ——①

半直線 OC 上の点 $R_t(u,\ \sqrt{3}u,\ 0)\ (u > 0)$ を考える。①に代入すると、半直線 OC と M の交点は

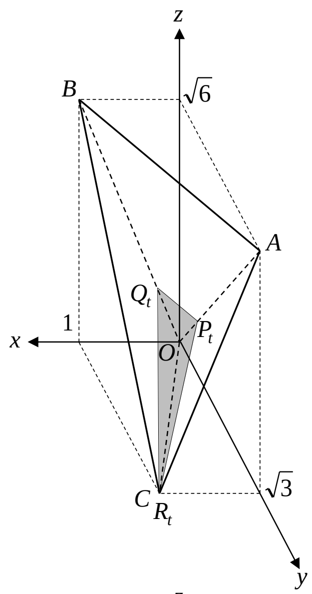
$\sqrt{3}u + \sqrt{3}u = 9\sqrt{3}t \quad u = \dfrac{9}{2}t \quad \therefore R_t\left(\dfrac{9}{2}t,\ \dfrac{9}{2}\sqrt{3}t,\ 0\right)$

ここで、三角形 $P_tQ_tR_t$ の面積 T を求めておく。$\overrightarrow{P_tQ_t} = (t,\ -\sqrt{3}t,\ 0),\ \overrightarrow{P_tR_t} = \left(\dfrac{9}{2}t,\ \dfrac{7\sqrt{3}}{2}t,\ -\sqrt{6}t\right)$ であるから

$\left|\overrightarrow{P_tQ_t}\right|^2 = 4t^2 \quad \left|\overrightarrow{P_tR_t}\right|^2 = \left(\dfrac{81}{4} + \dfrac{147}{4} + 6\right)t^2 = 63t^2 \quad \overrightarrow{P_tQ_t} \cdot \overrightarrow{P_tR_t} = \dfrac{9}{2}t^2 - \dfrac{21}{2}t^2 = -6t^2$

$\therefore T = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{P_tQ_t}\right|^2\left|\overrightarrow{P_tR_t}\right|^2 - \left(\overrightarrow{P_tQ_t} \cdot \overrightarrow{P_tR_t}\right)^2} = \dfrac{1}{2}\sqrt{4 \cdot 63t^4 - 36t^4} = \dfrac{1}{2}\sqrt{216t^4} = 3\sqrt{6}t^2$

$u \leqq 1 \quad 0 < t \leqq \dfrac{2}{9}$ のとき



R_t は線分 OC 上にあるから、M による切り口は三角形になる。
このとき、$S(t)$ は T に等しく　$\therefore S(t) = 3\sqrt{6}t^2$

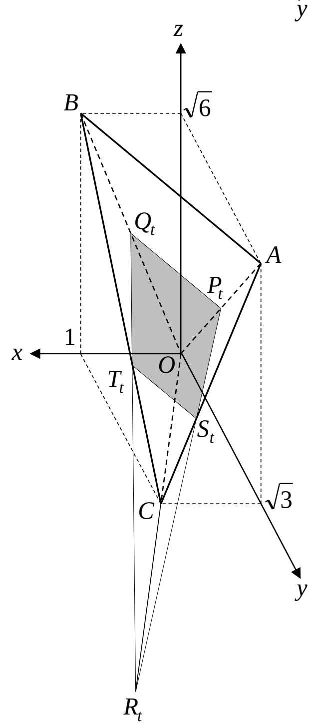
$u > 1 \quad \dfrac{2}{9} < t < 1$ のとき

R_t は線分 OC の延長上にあるから、M による切り口は四角形になる。
線分 CA と M の交点を $S_t(1-v,\ \sqrt{3},\ \sqrt{6}v)\ (v > 0)$ とする。①に代入すると

$$\sqrt{3}(1-v) + \sqrt{3} + 8\sqrt{3}v = 9\sqrt{3}t \qquad \therefore v = \frac{9t-2}{7}$$

線分 CB と M の交点を $T_t(1,\ \sqrt{3}(1-w),\ \sqrt{6}w)\ (v > 0)$ とする。①に代入すると

$$\sqrt{3} + \sqrt{3}(1-w) + 8\sqrt{3}w = 9\sqrt{3}t \qquad \therefore w = \frac{9t-2}{7}$$



$v = w$ より　$\overrightarrow{S_tT_t} = (v,\ -\sqrt{3}v,\ 0)$　したがって、$\overrightarrow{S_tT_t}$ は $\overrightarrow{P_tQ_t}$ と平行。

三角形 $P_tQ_tR_t$ と三角形 $S_tT_tR_t$ は相似。$\left|\overrightarrow{S_tT_t}\right| = 2v$ より、相似比は　$\dfrac{v}{t} = \dfrac{9t-2}{7t}$

$$\therefore S(t) = 3\sqrt{6}t^2 \times \left\{1 - \left(\frac{9t-2}{7t}\right)^2\right\} = 3\sqrt{6}\cdot\frac{\left\{49t^2 - (9t-2)^2\right\}}{49}$$

$$= \frac{3\sqrt{6}}{49}(-32t^2 + 36t - 4) = \frac{12\sqrt{6}}{49}(-8t^2 + 9t - 1)$$

以上により

$0 < t \leqq \dfrac{2}{9}$ のとき $S(t) = 3\sqrt{6}t^2$、$\dfrac{2}{9} < t < 1$ のとき $S(t) = \dfrac{12\sqrt{6}}{49}(-8t^2 + 9t - 1)$　……(答)

(3)

$$3\sqrt{6}\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{4\sqrt{6}}{27} \qquad \frac{12\sqrt{6}}{49}\left(-8\cdot\frac{4}{81} + 9\cdot\frac{2}{9} - 1\right) = \frac{12\sqrt{6}}{49}\cdot\frac{49}{81} = \frac{4\sqrt{6}}{27}$$

$S(t)$ は $t = \dfrac{2}{9}$ において連続。$0 < t \leqq \dfrac{2}{9}$ のとき、$S(t)$ は単調増加。

$\dfrac{2}{9} < t < 1$ のとき　$S(t) = \dfrac{12\sqrt{6}}{49}\left\{-8\left(t - \dfrac{9}{16}\right)^2 + \dfrac{81}{32} - 1\right\} = -\dfrac{96\sqrt{6}}{49}\left(t - \dfrac{9}{16}\right)^2 + \dfrac{3\sqrt{6}}{8}$

したがって、$S(t)$ は $t = \dfrac{9}{16}$ のとき最大になる。最大値は　$\dfrac{3\sqrt{6}}{8}$　……(答)