2011 年東大文 1

$f(1)=1$ より　$a+b+c+d=1$ ――①

$f(-1)=-1$ より　$-a+b-c+d=-1$ ――②

①＋②より　$b+d=0$　$\therefore d=-b$ ――③

①－②より　$a+c=1$　$\therefore c=1-a$ ――④

③より　$\int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx=2b\int_0^1(x^2-1)dx=2b\left[\frac{x^3}{3}-x\right]_0^1=-\frac{4}{3}b=1$　$\therefore b=-\frac{3}{4},\ d=\frac{3}{4}$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$　$f''(x)=6ax+2b=6ax-\frac{3}{2}$　$\{f''(x)\}^2=36a^2x^2-18ax+\frac{9}{4}$

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(36a^2x^2-18ax+\frac{9}{4}\right)dx=\left[12a^2x^3-9ax^2+\frac{9}{4}x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}=12a^2\left(\frac{1}{8}+1\right)-9a\left(\frac{1}{4}-1\right)+\frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$=\frac{27}{2}a^2+\frac{27}{4}a+\frac{27}{8}=\frac{27}{2}\left(a^2+\frac{1}{2}a\right)+\frac{27}{8}=\frac{27}{2}\left\{\left(a+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right\}+\frac{27}{8}=\frac{27}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{27}{8}-\frac{27}{32}$$

$$=\frac{27}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{81}{32}$$

したがって、I が最小になるとき $a=-\frac{1}{4}$　$\therefore c=\frac{5}{4}$

I を最小にする $f(x)$ は　$\therefore f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$ ……(答)

I の最小値は　$\therefore \frac{81}{32}$ ……(答)