2011 年東大文 $\boxed{2}$

(1)

$$a_1=\left\langle\sqrt{2}\right\rangle=\sqrt{2}-1 \quad a_2=\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right\rangle=\left\langle\sqrt{2}+1\right\rangle=\sqrt{2}+1-2=\sqrt{2}-1$$

任意の自然数 n について $a_n=\sqrt{2}-1$ と予想できるので、数学的帰納法で示す。

$n=1$ のとき成立。

$n=k$ のとき $a_k=\sqrt{2}-1$ と仮定すると　$a_{k+1}=\left\langle\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right\rangle=\left\langle\sqrt{2}+1\right\rangle=\sqrt{2}+1-2=\sqrt{2}-1$

したがって $n=k+1$ でも成立。　$\therefore a_n=\sqrt{2}-1\ (n\geqq 1)$ ……(答)

(2)

$a_1=\langle a\rangle=a$ より、$0\leqq a<1$ であり、条件から　$\dfrac{1}{3}\leqq a<1$　$\therefore 1<\dfrac{1}{a}\leqq 3$

$\dfrac{1}{a}$ の整数部分は1, 2, 3 のいずれかである。

$\dfrac{1}{a}$ の整数部分が1のとき　$1\leqq\dfrac{1}{a}<2$　$\therefore \dfrac{1}{2}<a\leqq 1$

$$a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=\frac{1}{a}-1=a \quad a^2+a-1=0 \quad a>0 \text{ より} \quad a=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

これは $\dfrac{1}{2}<a\leqq 1$ を満たす。

$\dfrac{1}{a}$ の整数部分が 2 のとき　$2\leqq\dfrac{1}{a}<3$　$\therefore \dfrac{1}{3}<a\leqq\dfrac{1}{2}$

$$a_2=\left\langle\frac{1}{a}\right\rangle=\frac{1}{a}-2=a \quad a^2+2a-1=0 \quad a>0 \text{ より} \quad a=-1+\sqrt{2}$$

これは $\dfrac{1}{3}<a\leqq\dfrac{1}{2}$ を満たす。

$\dfrac{1}{a}$ の整数部分が 3 のとき　$\dfrac{1}{a}=3$　$\therefore a=\dfrac{1}{3}$　$a_2=\langle 3\rangle=0$ であるから不適。

以上により　$\therefore a=-1+\sqrt{2},\ \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ ……(答)

※理系 $\boxed{2}$ の(2)までと共通。