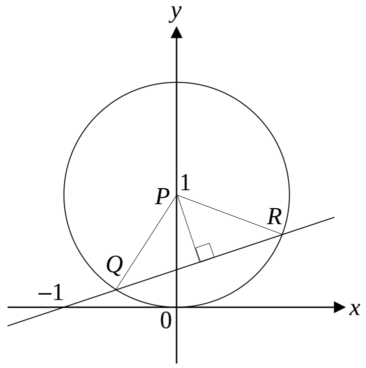
2011 年東大理 $\boxed{1}$

(1)

直線 $y = a(x+1)$ と、P の距離 d は　$d = \dfrac{|a \cdot 0 - 1 + a|}{\sqrt{a^2+1}} = \dfrac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}$



$QR = 2l$ とすると

$$l = \sqrt{1-d^2} = \sqrt{1 - \frac{(1-a)^2}{a^2+1}} = \sqrt{\frac{a^2+1-(a^2-2a+1)}{a^2+1}} = \sqrt{\frac{2a}{a^2+1}}$$

$$\therefore S(a) = \frac{1}{2} \cdot 2l \cdot d = ld = \frac{\sqrt{2a}(1-a)}{a^2+1}$$ ……(答)

(2)

(解答 1)

$f(a) = \{S(a)\}^2 = \dfrac{2a(a-1)^2}{(a^2+1)^2}$ とすると

$$f'(a) = 2\frac{\{(a-1)^2 + 2a(a-1)\}(a^2+1)^2 - a(a-1)^2 \cdot 2(a^2+1) \cdot 2a}{(a^2+1)^4}$$

$$= 2\frac{\{(a-1)+2a\}(a-1)(a^2+1) - 4a^2(a-1)^2}{(a^2+1)^4} = 2\frac{(a-1)\{(3a-1)(a^2+1) - 4a^2(a-1)\}}{(a^2+1)^4}$$

$$= 2\frac{(a-1)(3a^3 - a^2 + 3a - 1 - 4a^3 + 4a^2)}{(a^2+1)^4} = 2\frac{(1-a)(a^3 - 3a^2 - 3a + 1)}{(a^2+1)^4}$$

$$= 2\frac{(1-a)(a+1)(a^2-4a+1)}{(a^2+1)^4} = 2\frac{(1-a)(a+1)\{a-(2-\sqrt{3})\}\{a-(2+\sqrt{3})\}}{(a^2+1)^4}$$

$0 < 2-\sqrt{3} < 1$ より、$f(a)$ の増減は右の通り。

a	0	$\cdots$	$2-\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		＋	0	−	
$f(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

したがって、$S(a)$ が最大となる a は　$\therefore a = 2-\sqrt{3}$ ……(答)

(解答 2)

$S(a) = d\sqrt{1-d^2}$ であるから　$\{S(a)\}^2 = d^2(1-d^2) = -\left(d^2 - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4}$

$S(a)$ は、$d^2 = \dfrac{1}{2}$、$d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大になる。このとき

$$d^2 = \frac{(1-a)^2}{a^2+1} = \frac{1}{2} \qquad a^2+1 = 2(a^2-2a+1) \qquad a^2-4a+1=0 \qquad a = 2 \pm \sqrt{3}$$

$0 < a < 1$ より　$\therefore a = 2-\sqrt{3}$ ……(答)