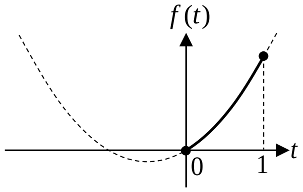
2011年東大理 $\boxed{6}$

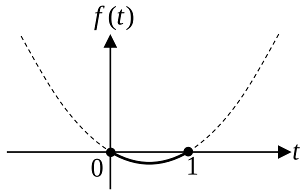
(1)

$f(t)=xt^2+yt=x\left(t+\dfrac{y}{2x}\right)^2-\dfrac{y^2}{4x}$　　$0\leqq t\leqq 1$における $f(t)$ の最大値、最小値を、 $f_{MAX}(t),\ f_{MIN}(t)$ と表す。



$-\dfrac{y}{2x}\leqq 0$　　$0\leqq y$ のとき

$f(t)$ は $0\leqq t\leqq 1$ で単調増加であり　　$f_{MAX}(t)=f(1)=x+y$　　$f_{MIN}(t)=f(0)=0$



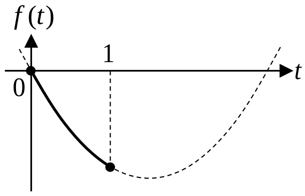
$0<-\dfrac{y}{2x}<1$　　$-2x<y<0$ のとき

$f_{MIN}(t)=-\dfrac{y^2}{4x}$ であり、 $f_{MAX}(t)$ は $x+y$ と 0 のうち大きい方である。

　$x+y\geqq 0$　　$y\geqq -x$ のとき　　$f_{MAX}(t)=x+y$ 。

　$x+y\leqq 0$　　$y\leqq -x$ のとき　　$f_{MAX}(t)=0$。

　まとめて、$-2x<y\leqq -x$ のとき $f_{MAX}(t)=0$、$-x\leqq y<0$ のとき $f_{MAX}(t)=x+y$ 。



$1\leqq -\dfrac{y}{2x}$　　$y\leqq -2x$ のとき

$f(t)$ は $0\leqq t\leqq 1$ で単調減少であり　　$f_{MAX}(t)=0$　　$f_{MIN}(t)=x+y$

以上により　$\therefore f_{MAX}(t)-f_{MIN}(t)=\begin{cases} 0\leqq y\text{のとき} & x+y \\ -x\leqq y<0\text{のとき} & x+y+\dfrac{y^2}{4x} \\ -2x<y\leqq -x\text{のとき} & \dfrac{y^2}{4x} \\ y\leqq -2x\text{のとき} & -x-y \end{cases}$　……(答)

(2)

$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$ より　　$-f(t)\leqq z\leqq 1-f(t)$ ――①

$0\leqq t\leqq 1$の範囲のすべての実数tについて、①を満たすような実数zが存在するとき、そのようなzの範囲は $-f_{MIN}(t)\leqq z\leqq 1-f_{MAX}(t)$ である。すなわち、$-f_{MIN}(t)\leqq 1-f_{MAX}(t)$ でなければならない。

　$\therefore f_{MAX}(t)-f_{MIN}(t)\leqq 1$

$0\leqq y$ のとき　　$x+y\leqq 1$　　$\therefore 0\leqq y\leqq -x+1$ ――②

$-x\leqq y<0$ のとき　　$x+y+\dfrac{y^2}{4x}\leqq 1$

整理して　　$y^2+4xy+4x^2\leqq 4x$　　$(y+2x)^2\leqq 4x$　　$-2\sqrt{x}\leqq y+2x\leqq 2\sqrt{x}$　　$\therefore -2x-2\sqrt{x}\leqq y\leqq -2x+2\sqrt{x}$

$x>0$ より $-2x-2\sqrt{x}<-x$ であるから　　$\therefore -x\leqq y\leqq -2x+2\sqrt{x}$ ――③

$g(x)=-2x+2\sqrt{x}$ とすると　　$g'(x)=-2+\dfrac{1}{\sqrt{x}}=\dfrac{1-2\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

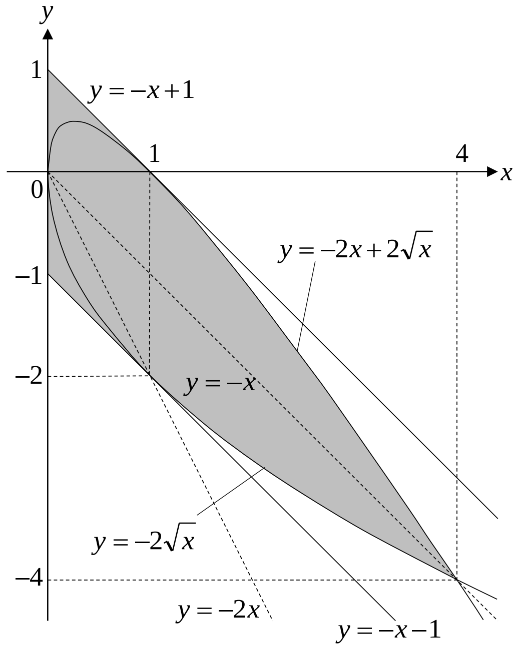
$x>0$ における増減は右の通り。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$
$g(x)$		↗	$\frac{1}{2}$	↘

また、 $g(1)=0,\ g'(1)=-1$ より、 $y=-2x+2\sqrt{x}$ は、点 $(1,\ 0)$ において $y=-x+1$ に接する。

$-2x<y\leqq -x$ のとき　$\dfrac{y^2}{4x}\leqq 1$　$y^2\leqq 4x$　$\therefore -2\sqrt{x}\leqq y\leqq 2\sqrt{x}$

$-x<0$ であるから　$\therefore -2\sqrt{x}\leqq y\leqq -x$ ――④



$y\leqq -2x$ のとき　$-x-y\leqq 1$　$\therefore -x-1\leqq y\leqq -2x$ ――⑤

$h(x)=-2\sqrt{x}$ とすると　$h'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$　$h(1)=-2,\ h'(1)=-1$ より

$y=-2\sqrt{x}$ は、点 $(1,\ -2)$ において $y=-x-1$ に接する。

以上②～⑤より、 S を図示すると右図の通り。

$y=-2x+2\sqrt{x}$ 、 $y=-2\sqrt{x}$ 、 $y=-x$ は、

$(4,\ -4)$ において交点を持つ。

境界線は、 y 軸上以外を含む。

(3)

題意の立体の、 $x=k\ (0\leqq k\leqq 1)$ による断面を考える。

$-k-1\leqq y\leqq -k+1$ であり、 z がとり得る範囲 $-f_{MIN}(t)\leqq z\leqq 1-f_{MAX}(t)$ は

$-k-1\leqq y\leqq -2k$ のとき　$f_{MAX}(t)=0$　$f_{MIN}(t)=k+y$　$\therefore -y-k\leqq z\leqq 1$

$-2k\leqq y\leqq -k$ のとき　$f_{MAX}(t)=0$　$f_{MIN}(t)=-\dfrac{y^2}{4k}$　$\therefore \dfrac{y^2}{4k}\leqq z\leqq 1$

$-k\leqq y\leqq 0$ のとき　$f_{MAX}(t)=k+y$　$f_{MIN}(t)=-\dfrac{y^2}{4k}$　$\therefore \dfrac{y^2}{4k}\leqq z\leqq -y-k+1$

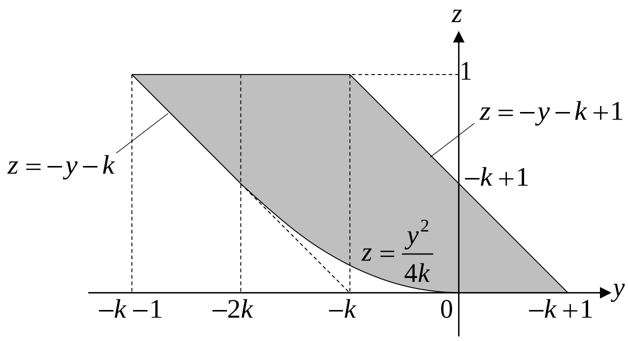
$0\leqq y\leqq -k+1$ のとき　$f_{MAX}(t)=k+y$　$f_{MIN}(t)=0$　$\therefore 0\leqq z\leqq -y-k+1$

これらを yz 平面に図示すると、右図の通り。

$x=k$ における断面積は

$$1\cdot 1-\frac{1}{4k}\int_0^{2k}y^2dy+\frac{1}{2}k^2$$

$$=\frac{1}{2}k^2+1-\frac{1}{4k}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^{2k}=\frac{1}{2}k^2+1-\frac{2}{3}k^2=-\frac{1}{6}k^2+1$$



求める体積は

$$\therefore \int_0^1\left(-\frac{1}{6}k^2+1\right)dk=\left[-\frac{1}{18}k^3+k\right]_0^1=-\frac{1}{18}+1=\frac{17}{18}\ \cdots\cdots(答)$$