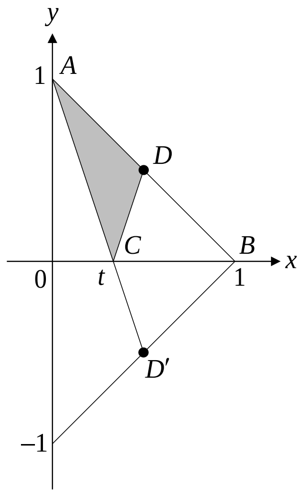
2012年東大文 $\boxed{2}$



直線 OC の式は　$y=-\dfrac{1}{t}(x-t)=-\dfrac{1}{t}x+1$　これと直線 $y=x-1$ との交点 D' は

$$-\frac{1}{t}x+1=x-1 \quad \frac{t+1}{t}x=2 \quad x=\frac{2t}{t+1} \quad y=\frac{2t}{t+1}-1=\frac{t-1}{t+1} \quad \therefore D'\left(\frac{2t}{t+1},\ \frac{t-1}{t+1}\right)$$

点 D は、点 D' と x 軸に関して対称な点であるから　$\therefore D\left(\dfrac{2t}{t+1},\ \dfrac{1-t}{t+1}\right)$

直線 AB の式は $y=-x+1$ であるから、直線 AB と点 C の距離は　$\dfrac{|t+0-1|}{\sqrt{1+1}}=\dfrac{1-t}{\sqrt{2}}$

辺 AD の長さは　$\sqrt{2}\cdot\dfrac{2t}{t+1}$

$\triangle ACD$ の面積 $S(t)$ は　$S(t)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-t}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}t}{t+1}=\dfrac{t-t^2}{t+1}$

$$S'(t)=\frac{(1-2t)(t+1)-(t-t^2)}{(t+1)^2}=\frac{-t^2-2t+1}{(t+1)^2}=-\frac{\{t-(-1+\sqrt{2})\}\{t-(-1-\sqrt{2})\}}{(t+1)^2}$$

$S(t)$ の増減は右の通りで、$t=-1+\sqrt{2}$ のとき極大。

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{2}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		＋	0	－	
$S(t)$		↗		↘	

求める最大値は

$$\frac{(-1+\sqrt{2})-(3-2\sqrt{2})}{\sqrt{2}}=\frac{-4+3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=3-2\sqrt{2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$