2012年東大理 6

(1)

$$U(t)AU(-t)=\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\cos t & -b\sin t\\ a\sin t & b\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ -\sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a\cos^2 t+b\sin^2 t & (a-b)\sin t\cos t\\ (a-b)\sin t\cos t & a\sin^2 t+b\cos^2 t\end{pmatrix}$$

$$U(t)AU(-t)-B=\begin{pmatrix}a\cos^2 t+b(\sin^2 t-1) & (a-b)\sin t\cos t\\ (a-b)\sin t\cos t & a(\sin^2 t-1)+b\cos^2 t\end{pmatrix}=(a-b)\cos t\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}$$

$U(t)AU(-t)$ において、$t=x,\ a=1,\ b=-1$ とすれば

$$U(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}AU(-x)=\begin{pmatrix}\cos^2 x-\sin^2 x & 2\sin x\cos x\\ 2\sin x\cos x & \sin^2 x-\cos^2 x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ \sin 2x & -\cos 2x\end{pmatrix}$$

$$(U(t)AU(-t)-B)U(x)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}AU(-x)=(a-b)\cos t\begin{pmatrix}\cos t & \sin t\\ \sin t & -\cos t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos 2x & \sin 2x\\ \sin 2x & -\cos 2x\end{pmatrix}$$

$$=(a-b)\cos t\begin{pmatrix}\cos t\cos 2x+\sin t\sin 2x & \cos t\sin 2x-\sin t\cos 2x\\ \sin t\cos 2x-\cos t\sin 2x & \sin t\sin 2x+\cos t\cos 2x\end{pmatrix}$$

$$=(a-b)\cos t\begin{pmatrix}\cos(2x-t) & \sin(2x-t)\\ -\sin(2x-t) & \cos(2x-t)\end{pmatrix}$$

$\therefore f(x)=2(a-b)\cos t\cos(2x-t)$

$a-b\geqq 0,\ -1\leqq\cos(2x-t)\leqq 1$ より、$\cos t>0$ であれば $\cos(2x-t)=1$ のとき最大、$\cos t=0$ であれば $f(x)=0$、$\cos t<0$ であれば $\cos(2x-t)=-1$ のとき最大。以上まとめて

$\therefore m(t)=2(a-b)|\cos t|$ ……(答)

(2)

$U(t)AU(-t)$ において、$a,\ b$ をそれぞれ $a^c,\ b^c$ で置き換えれば

$$U(t)CU(-t)=\begin{pmatrix}a^c\cos^2 t+b^c\sin^2 t & (a^c-b^c)\sin t\cos t\\ (a^c-b^c)\sin t\cos t & a^c\sin^2 t+b^c\cos^2 t\end{pmatrix}$$

$$U(t)CU(-t)D=\begin{pmatrix}a^c\cos^2 t+b^c\sin^2 t & (a^c-b^c)\sin t\cos t\\ (a^c-b^c)\sin t\cos t & a^c\sin^2 t+b^c\cos^2 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b^{1-c} & 0\\ 0 & a^{1-c}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a^c b^{1-c}\cos^2 t+b\sin^2 t & (a-a^{1-c}b^c)\sin t\cos t\\ (a^c b^{1-c}-b)\sin t\cos t & a\sin^2 t+a^{1-c}b^c\cos^2 t\end{pmatrix}$$

$$\therefore Tr\left(U(t)CU(-t)D\right)=(a+b)\sin^2 t+(a^c b^{1-c}+a^{1-c}b^c)\cos^2 t=(a+b)\sin^2 t+\left\{b\left(\frac{a}{b}\right)^c+a\left(\frac{b}{a}\right)^c\right\}\cos^2 t$$

$$U(t)AU(-t)+B=\begin{pmatrix}a\cos^2 t+b(\sin^2 t+1) & (a-b)\sin t\cos t\\ (a-b)\sin t\cos t & a(\sin^2 t+1)+b\cos^2 t\end{pmatrix}$$

$Tr\left(U(t)AU(-t)+B\right)=(a+b)(\sin^2 t+\cos^2 t+1)=2(a+b)$

$\therefore Tr\left(U(t)AU(-t)+B\right)-m(t)=2(a+b)-2(a-b)|\cos t|$

$$2Tr\big(U(t)CU(-t)D\big)-Tr\big(U(t)AU(-t)+B\big)+m(t)$$
$$=2(a+b)(1-\cos^2 t)+2\left\{b\left(\frac{a}{b}\right)^c+a\left(\frac{b}{a}\right)^c\right\}\cos^2 t-2(a+b)+2(a-b)|\cos t|$$
$$=2\left\{b\left(\frac{a}{b}\right)^c+a\left(\frac{b}{a}\right)^c-(a+b)\right\}\cos^2 t+2(a-b)|\cos t|$$
$$=2|\cos t|\left[\left\{b\left(\frac{a}{b}\right)^c+a\left(\frac{b}{a}\right)^c-(a+b)\right\}|\cos t|+(a-b)\right]$$

したがって、$2Tr\big(U(t)CU(-t)D\big)-Tr\big(U(t)AU(-t)+B\big)+m(t)\geqq 0$ が成立するには、

$\left\{b\left(\frac{a}{b}\right)^c+a\left(\frac{b}{a}\right)^c-(a+b)\right\}|\cos t|+(a-b)\geqq 0$ であればよい。

ここで、$\frac{a}{b}\geqq 1$ より

$$b\left(\frac{a}{b}\right)^c+a\left(\frac{b}{a}\right)^c-(a+b)=b\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^c+\left(\frac{b}{a}\right)^{c-1}-\frac{a}{b}-1\right\}=-b\left\{\frac{a}{b}-\left(\frac{a}{b}\right)^c-\left(\frac{a}{b}\right)^{1-c}+1\right\}$$
$$=-b\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^c-1\right\}\left\{\left(\frac{a}{b}\right)^{1-c}-1\right\}\leqq 0$$

相加平均・相乗平均の関係から

$$\therefore\left\{b\left(\frac{a}{b}\right)^c+a\left(\frac{b}{a}\right)^c-(a+b)\right\}|\cos t|+(a-b)$$
$$\geqq\left\{b\left(\frac{a}{b}\right)^c+a\left(\frac{b}{a}\right)^c-(a+b)\right\}+(a-b)=b\left(\frac{a}{b}\right)^c+a\left(\frac{b}{a}\right)^c-2b\geqq 2\sqrt{ab\left(\frac{a}{b}\right)^c\left(\frac{b}{a}\right)^c}-2b$$
$$=2\sqrt{ab}-2b=2\sqrt{b}\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\geqq 0$$

以上により示された。（証明終）