

2014 年東大文 [2]

(1)

最初、袋 U の中身は白球 $a+2$ 個、赤球 1 個であるから $p_1 = \frac{1}{a+3}$ ……(答)

2 回目に赤球を取り出すためには、1 回目に白球を取り出す必要がある。この確率は $\frac{a+2}{a+3}$ 。

1 回目に白球を取り出すと、袋 U の中身は白球 a 個、赤球 1 個になる。赤球を取り出す確率は $\frac{1}{a+1}$ 。

以上により $\therefore p_2 = \frac{a+2}{a+3} \cdot \frac{1}{a+1} = \frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$ ……(答)

(2)

n 回目に赤球を取り出したとき、 $n+1$ 回目には必ず白球を取り出す。

n 回目に白球を取り出したとき、 $n+1$ 回目には白球 a 個、赤球 1 個の状態で玉を取り出す。

結局、 $n \geq 1$ について $\therefore p_{n+1} = \frac{1}{a+1}(1-p_n)$

$$p_{n+1} - \frac{1}{a+2} = -\frac{1}{a+1} \left(p_n - \frac{1}{a+2} \right)$$

$$p_n - \frac{1}{a+2} = \left(p_1 - \frac{1}{a+2} \right) \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{a+3} - \frac{1}{a+2} \right) \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-1} = -\frac{1}{(a+2)(a+3)} \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-1}$$

$$\therefore p_n = \frac{1}{a+2} - \frac{1}{(a+2)(a+3)} \left(-\frac{1}{a+1} \right)^{n-1} \dots\dots(答)$$

なお、

$$p_1 = \frac{1}{a+2} - \frac{1}{(a+2)(a+3)} = \frac{a+3-1}{(a+2)(a+3)} = \frac{1}{a+3}$$

$$p_2 = \frac{1}{a+2} + \frac{1}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{(a+1)(a+3)+1}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{(a+2)^2}{(a+1)(a+2)(a+3)} = \frac{a+2}{(a+1)(a+3)}$$

であるから、確かに $n=1, 2$ でも成立。

※理系 [2] の (2) までと共通。