2014年東大理 $\boxed{6}$

(1)

$P(p,\ \sqrt{3}p)\ (0 \leqq p \leqq 2),\ Q(q,\ -\sqrt{3}q)\ (-2 \leqq q \leqq 0)$ とする。$OP = 2p,\ OQ = -2q$ であるから

$OP + OQ = 2(p-q) = 6 \quad p - q = 3 \quad \therefore q = p - 3$

ここで、$-2 \leqq q \leqq 0$ より　$-2 \leqq p - 3 \leqq 0 \quad 1 \leqq p \leqq 3 \quad 0 \leqq p \leqq 2$ より　$\therefore 1 \leqq p \leqq 2$

PQ の傾きは　$\dfrac{\sqrt{3}(p+q)}{p-q} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)$　PQ の式は　$y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)(x-p) + \sqrt{3}p$

$2p^2 - 2(x+3)p + 3x + \sqrt{3}y = 0$　PQ 上に $(s,\ t)$ が存在するとき　$\therefore 2p^2 - 2(s+3)p + 3s + \sqrt{3}t = 0$

$f(p) = 2p^2 - 2(s+3)p + 3s + \sqrt{3}t = 2\left(p - \dfrac{s+3}{2}\right)^2 + \sqrt{3}t - \dfrac{1}{2}(s^2+9)$ と置く。

$f(p) = 0$ が $1 \leqq p \leqq 2$ の範囲で実数解を持つ条件を考える。

$f(p) = 0$ が $1 \leqq p \leqq 2$ の範囲で 1 つの実数解を持つとき

$f(1) \cdot f(2) \leqq 0 \quad (\sqrt{3}t + s - 4)(\sqrt{3}t - s - 4) \leqq 0 \quad \left(t + \dfrac{s-4}{\sqrt{3}}\right)\left(t - \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}\right) \leqq 0$

$s \geqq 0$ のとき　$\dfrac{-s+4}{\sqrt{3}} \leqq t \leqq \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}$　$s \leqq 0$ のとき　$\dfrac{s+4}{\sqrt{3}} \leqq t \leqq \dfrac{-s+4}{\sqrt{3}}$

$(s,\ t)$ は、$t \geqq -\sqrt{3}s,\ t \geqq \sqrt{3}s$ を満たす。

直線 $t = -\sqrt{3}s$ と直線 $t = \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}$ の交点は $(-1,\ \sqrt{3})$、直線 $t = -\sqrt{3}s$ と直線 $t = \dfrac{-s+4}{\sqrt{3}}$ の交点は $(-2,\ 2\sqrt{3})$

直線 $t = \sqrt{3}s$ と直線 $t = \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}$ の交点は $(2,\ 2\sqrt{3})$、直線 $t = \sqrt{3}s$ と直線 $t = \dfrac{-s+4}{\sqrt{3}}$ の交点は $(1,\ \sqrt{3})$

したがって

$-2 \leqq s \leqq -1$ のとき　$-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \dfrac{-s+4}{\sqrt{3}}$　$-1 \leqq s \leqq 0$ のとき　$\dfrac{s+4}{\sqrt{3}} \leqq t \leqq \dfrac{-s+4}{\sqrt{3}}$

$0 \leqq s \leqq 1$ のとき　$\dfrac{-s+4}{\sqrt{3}} \leqq t \leqq \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}$　$1 \leqq s \leqq 2$ のとき　$\sqrt{3}s \leqq t \leqq \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}$　――①

$f(p) = 0$ が $1 \leqq p \leqq 2$ の範囲で 2 つの実数解を持つとき（重解を含む）

$f(1) \geqq 0,\ f(2) \geqq 0,\ 1 < \dfrac{s+3}{2} < 2,\ \sqrt{3}t - \dfrac{1}{2}(s^2+9) \leqq 0$

$\therefore t \geqq \dfrac{-s+4}{\sqrt{3}},\ t \geqq \dfrac{s+4}{\sqrt{3}},\ -1 < s < 1,\ t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$

放物線 $t = \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2 + \dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ は、$\left(-1,\ \dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right)$ で直線 $t = \dfrac{-s+4}{\sqrt{3}}$ に接し、$\left(1,\ \dfrac{5}{3}\sqrt{3}\right)$ で直線 $t = \dfrac{s+4}{\sqrt{3}}$ に接する。

$-1<s\leqq 0$のとき　$\dfrac{-s+4}{\sqrt{3}}\leqq t\leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$　$0\leqq s<1$のとき　$\dfrac{s+4}{\sqrt{3}}s\leqq t\leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ ――②

以上①または②となる範囲を、$0\leqq s\leqq 2$についてまとめると

$$\therefore \begin{cases} 0\leqq s\leqq 1のとき & \dfrac{-s+4}{\sqrt{3}}\leqq t\leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}s^2+\dfrac{3}{2}\sqrt{3} \\ 1\leqq s\leqq 2のとき & \sqrt{3}s\leqq t\leqq \dfrac{s+4}{\sqrt{3}} \end{cases}$$ ……(答)

(2)

対称性より、Dを図示すると右図の通り。

境界線を含む。