2015年東大文 $\boxed{2}$

条件(i)を満たす2次関数を、$y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$とする。$A(-1,1), B(1,-1)$を通るので

$1=a-b+c,\ -1=a+b+c \quad \therefore b=-1, c=-a$

$y=ax^2-x-a=a\left(x-\dfrac{1}{2a}\right)^2-a-\dfrac{1}{4a}$より、頂点の$x$座標は$\dfrac{1}{2a}$であるから

$\dfrac{1}{2|a|}\geqq 1 \quad |a|\leqq\dfrac{1}{2} \quad \therefore -\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2},\ a\neq 0$ ——①

$y=ax^2-x-a$より　$a(1-x^2)=-x-y$

$-1<x<1$のとき　$a=-\dfrac{x+y}{1-x^2}$であるから、①より

$-\dfrac{1}{2}\leqq-\dfrac{x+y}{1-x^2}\leqq\dfrac{1}{2} \quad -\dfrac{1}{2}\leqq\dfrac{x+y}{1-x^2}\leqq\dfrac{1}{2} \quad -\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}x^2\leqq x+y\leqq\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}x^2$

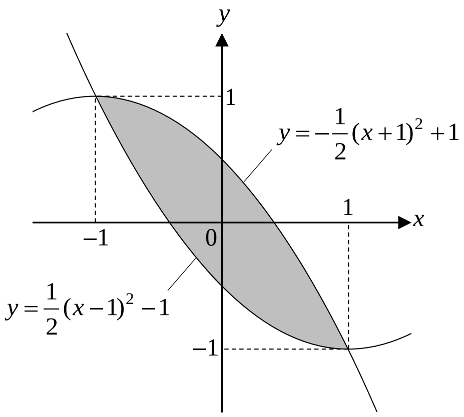
$\dfrac{1}{2}x^2-x-\dfrac{1}{2}\leqq y\leqq-\dfrac{1}{2}x^2-x+\dfrac{1}{2} \quad \therefore\dfrac{1}{2}(x-1)^2-1\leqq y\leqq-\dfrac{1}{2}(x+1)^2+1,\ y\neq -x$ ——②

$x=\pm 1$のとき　$y=-x$ ——③

条件(ii)は、Pが直線AB上にあればよい。　$\therefore -1\leqq x\leqq 1,\ x+y=0$ ——④

①～④をまとめると、結局　$\therefore\dfrac{1}{2}(x-1)^2-1\leqq y\leqq-\dfrac{1}{2}(x+1)^2+1$

図示すると右の通りであり、境界線を含む。



面積は

$$\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)dx=\frac{2^3}{6}=\frac{4}{3}\ \cdots\cdots(\text{答})$$