2015年東大理 $\boxed{2}$

(1)
求める確率を a_n とする。
最初に1〜3の目が出たとき
まず「AA」と書き、その後に書き加える文字列の $n-2$ 番目が「A」であればよい。
最初に4〜6の目が出たとき
まず「B」か「C」か「D」と書き、その後に書き加える文字列の $n-1$ 番目が「A」であればよい。

したがって、$n \geqq 3$ のとき $a_n = \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_{n-2}$ が成り立つから　$\therefore a_{n+2} = \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$

変形すると　$a_{n+2} + \frac{1}{2}a_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$　これより、$a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n$ は n によらず一定。

1番目が「A」になるのは、最初に1〜3の目が出たとき。　$\therefore a_1 = \frac{1}{2}$

2番目が「A」になるのは、最初に1〜3の目が出るか、最初に4〜6目が出て2回目に1〜3の目が出たとき。

$\therefore a_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$

$a_{n+1} + \frac{1}{2}a_n = a_2 + \frac{1}{2}a_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$　$a_{n+1} - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{2}{3}\right)$

$a_n - \frac{2}{3} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1 - \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$　$\therefore a_n = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ……(答)

$n = 1, 2$ でも成立する。

(2)
求める確率を b_n とする。$b_2 = 0$ である。
2番目が「A」、3番目が「B」になるのは

最初に1〜3の目が出て、2回目に4の目が出たとき。　$\therefore b_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

3番目が「A」、4番目が「B」になるのは

最初に4〜6の目が出て、2回目に1〜3の目が出て、3回目に4の目が出たときたとき。　$\therefore b_4 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$

$n \geqq 3$ のとき、(1)と同じ漸化式 $b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n$ が成り立つので

$b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n = b_4 + \frac{1}{2}b_3 = \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{1}{12}$　$b_{n+1} - \frac{1}{18} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{18}\right)$

$b_n - \frac{1}{18} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}\left(b_3 - \frac{1}{18}\right) = \frac{1}{36}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3} = -\frac{1}{18}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$　$\therefore b_n = \frac{1}{18}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}$ ……(答)

$n = 2, 3, 4$ でも成立する。