2015年東大理 $\boxed{5}$

$1 \leqq m \leqq n-1$ のとき

$${}_nC_m = \frac{n(n-1)\cdots(n-m+2)(n-m+1)}{m\cdot(m-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n+1-m}{m}\cdot\frac{n(n-1)\cdots(n-m+2)}{(m-1)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n+1-m}{m}\,{}_nC_{m-1}$$

${}_{2015}C_1 = 2015$ は奇数。

${}_{2015}C_2 = \frac{2016-2}{2}\,{}_{2015}C_1 = 1007\cdot 2015$ より、${}_{2015}C_2$ は奇数。

${}_{2015}C_3 = \frac{2016-3}{3}\,{}_{2015}C_2 = 671\cdot 1007\cdot 2015$ より、${}_{2015}C_3$ は奇数。

このように、順次 $\frac{2016-4}{4}, \frac{2016-5}{5}, \cdots, \frac{2016-m}{m}$ をかけていき、${}_{2015}C_m$ が初めて偶数になったとする。

このとき、$\frac{2016-m}{m}$ が初めて偶数になる。

$\frac{2016-m}{m} = 2k\ (k \geqq 1)$ とすると　$2016 - m = 2km$　$2016 = (2k+1)m$

m が最小になるのは、$2k+1$ が最大のときである。$2016 = 2^5\cdot 3^2\cdot 7$ より、$2k+1$ の最大値は $3^2\cdot 7 = 63$。

したがって、m の最小値は $2^5 = 32$。このとき $\frac{2016-32}{32} = 62$ で、確かに偶数である。

求める最小値は　$\therefore m = 32$　……(答)