2015 年東大理 $\boxed{6}$

(1)

$|x| \leqq \dfrac{1}{n}$ のとき　$g(nx) = \dfrac{\cos(n\pi x)+1}{2}$ で、$0 \leqq g(nx) \leqq 1$　$|x| > \dfrac{1}{n}$ のとき　$g(nx) = 0$

$n\displaystyle\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)dx = n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\cos(n\pi x)+1}{2} f(x)dx$ であり、$p \leqq f(x) \leqq q$ より

$$\therefore pn\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\cos(n\pi x)+1}{2} dx \leqq n\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)dx \leqq qn\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\cos(n\pi x)+1}{2} dx$$

$\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{\cos(n\pi x)+1}{2} dx = \int_{0}^{\frac{1}{n}} \{\cos(n\pi x)+1\} dx = \left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} + x\right]_0^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}$ より　$\therefore p \leqq n\displaystyle\int_{-1}^{1} g(nx)f(x)dx \leqq q$ （証明終）

(2)

$|x| \leqq \dfrac{1}{n}$ のとき　$h(nx) = -\dfrac{\pi}{2}\sin(n\pi x)$　$|x| > \dfrac{1}{n}$ のとき　$h(nx) = 0$

$h(nx) = \dfrac{1}{n}\left\{\dfrac{\cos(n\pi x)+1}{2}\right\}' = \dfrac{1}{n}\{g(nx)\}'$ であり、また $F(x) = \log(1+e^{x+1})$ とすると

$$n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})dx = n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \{g(nx)\}' F(x)dx = n\big[g(nx)F(x)\big]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} - n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)F'(x)dx = -n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)F'(x)dx$$

$F'(x) = f(x) = \dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}} = 1 - \dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ とすると　$f'(x) = \dfrac{e^{x+1}}{(1+e^{x+1})^2} > 0$

$f(x)$ は単調増加であるから、$-\dfrac{1}{n} \leqq x \leqq \dfrac{1}{n}$ のとき　$\dfrac{e^{1-\frac{1}{n}}}{1+e^{1-\frac{1}{n}}} \leqq f(x) \leqq \dfrac{e^{1+\frac{1}{n}}}{1+e^{1+\frac{1}{n}}}$

(1) より、$\dfrac{e^{1-\frac{1}{n}}}{1+e^{1-\frac{1}{n}}} \leqq n\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} g(nx)f(x)dx \leqq \dfrac{e^{1+\frac{1}{n}}}{1+e^{1+\frac{1}{n}}}$ であるから

$$\therefore -\frac{e^{1+\frac{1}{n}}}{1+e^{1+\frac{1}{n}}} \leqq n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})dx \leqq -\frac{e^{1-\frac{1}{n}}}{1+e^{1-\frac{1}{n}}}$$

はさみうちの原理により　$\therefore \displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_{-1}^{1} h(nx)\log(1+e^{x+1})dx = -\frac{e}{1+e}$ ……(答)