

2016 年東大文 [2]

A が優勝するパターンは、

- i) 「A が B に勝つ」 → 「C が A に勝つ」 → 「B が C に勝つ」 のパターンを k 回 ($k \geq 0$) 繰り返した後、
A が B, C に 2 連勝し、 $3k+2$ 試合目で優勝する。
- ii) 「B が A に勝つ」 → 「C が B に勝つ」 → 「A が C に勝つ」 のパターンを k 回 ($k \geq 1$) 繰り返した後、
A が B に勝ち、 $3k+1$ 試合目で優勝する。
- のいずれかである。

(1)

ちょうど 5 試合で A が優勝するのは i) のパターンであるから $\therefore \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$ …… (答)

(2)

i) のパターンの優勝確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{3k} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

ii) のパターンの優勝確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^{3k} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

以上により、ちょうど n 試合目で A が優勝する確率は

n が 3 の倍数であるとき 0、 n が 3 の倍数でないとき $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ …… (答)

(3)

総試合数 $3m$ 回以下で A が優勝するのは、(1) より、

i) 2, 5, …, $3m-1$ 試合目で優勝するか、ii) 4, 7, …, $3m-2$ 試合目で優勝するかのいずれかである。

$m \geq 2$ のとき

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{3(m-1)}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^3} = \frac{2}{7} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{3m} \right\} + \frac{1}{14} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{3(m-1)} \right\} = \frac{5}{14} - \frac{3}{28} \left(\frac{1}{2}\right)^{3(m-1)}$$

$m=1$ のとき、2 試合目で優勝しかないので、確率は $\frac{1}{4}$ で、 $m=1$ でも成立。

求める確率は $\therefore \frac{5}{14} - \frac{3}{28} \left(\frac{1}{2}\right)^{3(m-1)} = \frac{5}{14} - \frac{3}{7} \left(\frac{1}{2}\right)^{3m-1}$ …… (答)