2016 年東大理 $\boxed{3}$

R_1 は直線 QP_1 上の点であるから、$\overrightarrow{OR_1}=(1-t)\overrightarrow{OQ}+t\,\overrightarrow{OP_1}$ と表せる。

$\overrightarrow{OR_1}=(t,\ 0,\ a(1-t)+t)$ であり、z 座標が 0 であるから

$$a(1-t)+t=a-(a-1)t=0 \quad \therefore t=\frac{a}{a-1} \quad \therefore \overrightarrow{OR_1}=\left(\frac{a}{a-1},\ 0,\ 0\right)$$

同様に、$\overrightarrow{OR_2}=(t,\ t,\ a(1-t)+t)$ とおけて、$t=\dfrac{a}{a-1}$ であるから　$\therefore \overrightarrow{OR_2}=\left(\dfrac{a}{a-1},\ \dfrac{a}{a-1},\ 0\right)$

$\overrightarrow{OR_3}=(t,\ 0,\ a(1-t)+3t)$ とおけて、$a(1-t)+3t=a+(3-a)t=0$ であるから

$$\therefore t=-\frac{a}{3-a} \quad \therefore \overrightarrow{OR_3}=\left(-\frac{a}{3-a},\ 0,\ 0\right)$$

辺 R_1R_3 は x 軸に平行であり、辺 R_1R_2 は y 軸に平行であるから、$R_1R_3\perp R_1R_2$ である。

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{a-1}+\frac{a}{3-a}\right)\cdot\frac{a}{a-1}=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{2}{(a-1)(3-a)}\cdot\frac{1}{a-1}=\frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}$$

$$S'(a)=\frac{2a(a-1)^2(3-a)-a^2\left\{2(a-1)(3-a)-(a-1)^2\right\}}{(a-1)^4(3-a)^2}=\frac{2a(a-1)(3-a)-a^2\left\{2(3-a)-(a-1)\right\}}{(a-1)^3(3-a)^2}$$

$$=\frac{a\left\{2(a-1)(3-a)-a(7-3a)\right\}}{(a-1)^3(3-a)^2}=\frac{a(-6+8a-2a^2-7a+3a^2)}{(a-1)^3(3-a)^2}=\frac{a(a^2+a-6)}{(a-1)^3(3-a)^2}=\frac{a(a+3)(a-2)}{(a-1)^3(3-a)^2}$$

$S(a)$ の $1<a<3$ における増減は右の通りで、$a=2$ のとき極小。

a	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$S(a)$ を最小にする a は　$\therefore a=2$　……（答）

そのときの最小値は　$\therefore S(2)=4$　……（答）