2017年東大理$\boxed{5}$

(1)

$y=x^2+k$ と $y=ax+b$ が接するので　$x^2+k=ax+b$　$x^2-ax+k-b=0$ が重解を持つ。

$$D=a^2-4(k-b)=0 \quad \therefore k-b=\frac{1}{4}a^2 \text{ ——①}$$

$a=0$ のとき、$y=b$ は $x=y^2+k$ の接線にはならない。$a\neq 0$ であるから、$x=\dfrac{y-b}{a}$ と変形できる。

$x=y^2+k$ と $x=\dfrac{y-b}{a}$ が接するので　$y^2+k=\dfrac{y-b}{a}$　$ay^2-y+ak+b=0$ が重解を持つ。

$$D=1-4a(ak+b)=0 \quad \therefore ak+b=\frac{1}{4a} \text{ ——②}$$

①＋②より　$(a+1)k=\dfrac{1}{4}\left(a^2+\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{a^3+1}{4a}=\dfrac{(a+1)(a^2-a+1)}{4a}$　$a\neq -1$ より　$\therefore k=\dfrac{a^2-a+1}{4a}=\dfrac{1}{4}\left(a+\dfrac{1}{a}-1\right)$

①より　$\therefore b=k-\dfrac{1}{4}a^2=\dfrac{1}{4}\left(-a^2+a+\dfrac{1}{a}-1\right)$

以上により　$\therefore k=\dfrac{1}{4}\left(a+\dfrac{1}{a}-1\right),\ b=\dfrac{1}{4}\left(-a^2+a+\dfrac{1}{a}-1\right)$ ……(答)

(2)

$a\neq -1$ であるような共通接線を考える。

(1)の結果に $a=2$ を代入すると、$k=\dfrac{3}{8},\ b=-\dfrac{5}{8}$ であり、$y=2x-\dfrac{5}{8}$ は、共通接線である。

$a=2$ 以外に、$k=\dfrac{3}{8}$ となるような a がないか調べる。$k=\dfrac{1}{4}\left(a+\dfrac{1}{a}-1\right)=\dfrac{3}{8}$ とすると

$$2a^2+2-2a=3a \quad 2a^2-5a+2=(2a-1)(a-2)=0 \quad \therefore a=\frac{1}{2},\ 2$$

$a=\dfrac{1}{2}$ のとき、$b=\dfrac{5}{16}$ であり、$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{16}$ も、共通接線である。

次に、$a=-1$ であるような共通接線を考える。

$a=-1$ のとき、(1)の①②は $k-b=\dfrac{1}{4}$ となり、$b=k-\dfrac{1}{4}$ である。$k=\dfrac{3}{8}$ のとき、$b=\dfrac{1}{8}$ である。

$y=-x+\dfrac{1}{8}$ も、共通接線である。

以上により、共通接線は3本存在し、それらの傾きと y 切片は　$\therefore (a,\ b)=\left(-1,\ \dfrac{1}{8}\right),\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{5}{16}\right),\left(2,\ -\dfrac{5}{8}\right)$ ……(答)