

2018 年東大文 [3]

(1)

$$f'(x) = 3x^2 - 3a^2 = 3(x+a)(x-a)$$

$f(x)$ の増減は右の通り。 $f(x)$ は $x \geq a$ で単調増加であるから、
 $x \geq 1$ で $f(x)$ が単調に増加するためには $\therefore 0 < a \leq 1$ ……(答)

x	…	$-a$	…	a	…
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

(2)

$f(\pm a) = \mp 2a^3$ であるから、 $y = f(x)$ のグラフは右図の通り。

条件 1 より、 $y = f(x)$ と $y = b$ のグラフの共有点の個数を考えれば

$$\therefore -2a^3 < b < 2a^3 \text{ ——①}$$

条件 2 より、 $\beta > 0$ であるから $b < 0$ である。

$\beta < a$ であるから、 $a > 1$ である必要がある。

$f(x)$ は $-a < x < a$ で単調減少であるから、 $a > 1$ の条件下で、

$$\beta > 1 \text{ となるには } b < f(1) \quad \therefore b < 1 - 3a^2 \text{ ——②}$$

以上①、②より $\therefore a > 1$ かつ $-2a^3 < b < 1 - 3a^2$ ……(答)

図示すると右図の通りで、境界線は含まない。

曲線 $b = -2a^3$ と $b = 1 - 3a^2$ は、点 $(1, -2)$ において接している。

※理系 [4] には(1)がない。

