2018 年東大文 $\boxed{4}$

(1)

$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p \\ p^2 \end{pmatrix} (-1 \leqq p \leqq 1)$とすると　$\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2p \\ 2p^2 \end{pmatrix}$

$X = 2p, Y = 2p^2$とすると　$p = \dfrac{X}{2}$　$\therefore Y = \dfrac{X^2}{2}\ (-2 \leqq X \leqq 2)$

点Qの軌跡は　$\therefore y = \dfrac{x^2}{2}\ (-2 \leqq x \leqq 2)$ ⋯⋯(答)

(2)

(1)で求めた点Qの軌跡をC'とする。
C'をx軸の正方向に 1 移動させるとき、C'が通過する領域が、点Sが動く領域である。

点Sが動く領域を図示すると、右図の通り。求める面積をTとすると、対称性より

$$\frac{1}{2}T = \int_{\frac{1}{2}}^{2} \frac{x^2}{2}\,dx + 1 \cdot 2 - \int_0^2 \frac{x^2}{2}\,dx$$

$$= 2 - \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x^2}{2}\,dx = 2 - \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{95}{48}$$

$$\therefore T = \frac{95}{24} \cdots\cdots (答)$$