

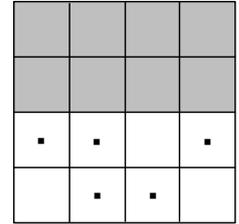
2020 年東大文 [2]

(1)

4×4 のマス目を考える。4 行 4 列、8 つの並びのうち、いずれか 2 つの並びに点が 1 個も置かれなとする。

平行する 2 行または 2 列に点が 1 個も置かれなとき

例えば右図の場合、点が置けるのは 4×2 のマス目に等しく、2 行 4 列に少なくとも 1 個点が置かれる。4 列のうち 1 列は点が 2 個置かれ、残り 3 列は点が 1 個置かれる。このような置き方の総数は $4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$ 通り。

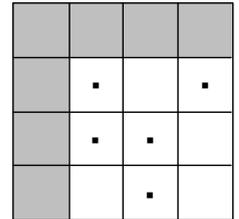


平行する 2 行または 2 列の選び方は、 $2 \times {}_4C_2 = 12$ 通り。

平行する 2 行または 2 列に点が 1 個も置かれな置き方は、 $32 \times 12 = 384$ 通り。

直交する 1 行 1 列に点が 1 個も置かれなとき

点が置けるのは 3×3 のマス目に等しく、3 行 3 列に少なくとも 1 個点が置かれる。3 行 3 列のうち、いずれか 1 つの並びに点が 1 個も置かれな置き方は、 $6 \times 6 = 36$ 通りであるから、3 行 3 列に少なくとも 1 個点が置かれる置き方の総数は ${}_9C_5 - 36 = 126 - 36 = 90$ 通り。



直交する 1 行 1 列の選び方は、 $4 \times 4 = 16$ 通り。

直交する 1 行 1 列に点が 1 個も置かれな置き方は、 $90 \times 16 = 1440$ 通り。

求める選び方は $1440 + 384 = 1824$ 通り ……(答)

(2)

どの行にも少なくとも 1 個の点が置かれるから、いずれか 1 行には 2 個の点が置かれる。同様に、どの列にも少なくとも 1 個の点が置かれるから、いずれか 1 列には 2 個の点が置かれる。2 個の点が置かれた行、列を、太枠で表す。

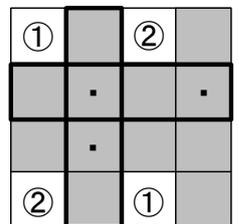
2 個の点が置かれた行と列が、点を共有するとき

1 点は交点に置かれ、それ以外の 2 点の置き方は $3 \times 3 = 9$ 通り。

残り 2 点の置き方は、右図の①か②に限られるから、2 通り。

2 個の点が置かれた行と列が、点を共有するときの置き方の総数は

$$16 \times 9 \times 2 = 288 \text{ 通り。}$$



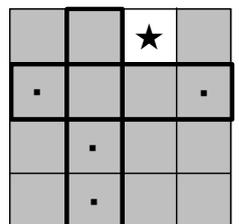
2 個の点が置かれた行と列が、点を共有しないとき

4 点は交点以外に置かれるから、置き方は $3 \times 3 = 9$ 通り。

残り 1 点の置き方は、★の箇所 1 通りしかない。

2 個の点が置かれた行と列が、点を共有しないときの置き方の総数は

$$16 \times 9 = 144 \text{ 通り。}$$



求める選び方は $288 + 144 = 432$ 通り ……(答)