2020年東大理$\boxed{3}$

(1)

$$\frac{y(t)}{x(t)}=3\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}=3\sqrt{\frac{2}{1+t}-1}$$

$\dfrac{2}{1+t}$は$-1<t\leqq 1$において単調減少であるから、$\dfrac{y(t)}{x(t)}$も単調減少である。(証明終)

(2)

$$f(t)=\sqrt{\{x(t)\}^2+\{y(t)\}^2}=\sqrt{(1+t)^3+9(1+t)^2(1-t)}=(1+t)\sqrt{10-8t}$$

$$f'(t)=\sqrt{10-8t}+(1+t)\cdot\frac{(-8)}{2\sqrt{10-8t}}=\frac{10-8t-4(1+t)}{\sqrt{10-8t}}=\frac{6(1-2t)}{\sqrt{10-8t}}$$

$f(t)$の増減は右の通りで、$t=\dfrac{1}{2}$のとき極大である。

最大値は　$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$ ……(答)

t	-1	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

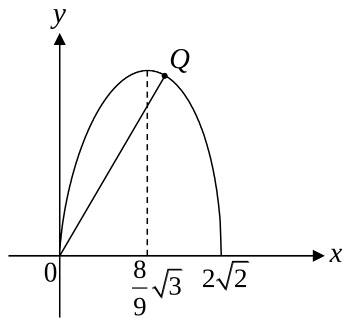
(3)

$-1\leqq t\leqq 1$において、$x(t)$は単調増加。

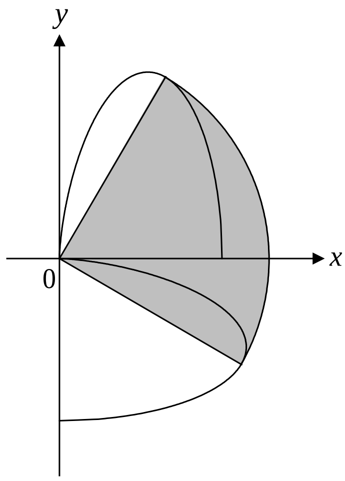
$$y'(t)=3\sqrt{1-t}-\frac{3(1+t)}{2\sqrt{1-t}}=\frac{6(1-t)-3(1+t)}{2\sqrt{1-t}}=\frac{3(1-3t)}{2\sqrt{1-t}}$$ であるから、

$y(t)$は$-1\leqq t\leqq\dfrac{1}{3}$のとき単調増加、$\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq 1$のとき単調減少。

Cの概形は右図のようになる。



$f(t)$の最大値を与えるPを、Qとする。(2)より、原点を中心としてDを時計回りに90°回転させるとき、線分OQが通過する部分は、半径$\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$の扇型になる。



求める面積は、Dの面積と、半径$\dfrac{3}{2}\sqrt{6}$、中心角90°の扇型の面積の和である。

Dの面積は

$$\int_0^{2\sqrt{2}}y\,dx=\int_{-1}^{1}y\frac{dx}{dt}dt=3\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{1-t}\,dt=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}(1+t)\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$$=9\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt+\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$t\sqrt{1-t^2}$は奇関数であるから、$\displaystyle\int_{-1}^{1}t\sqrt{1-t^2}\,dt=0$。$\displaystyle\int_0^1\sqrt{1-t^2}\,dt$は、半径1の円の面積の$\dfrac{1}{4}$に等しいから、

求める面積は　$9\cdot\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{2}\cdot\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{6}\right)^2\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{9}{4}\pi+\dfrac{27}{8}\pi=\dfrac{45}{8}\pi$ ……(答)