2020年東大理$\boxed{4}$文$\boxed{4}$共通

(1)

$(2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})^2=2^0+2^2+2^4+\cdots+2^{2(n-1)}+2a_{n,2}$より

$$2a_{n,2}=(1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1})^2-(1+4+4^2+\cdots+4^{n-1})=\left(\frac{2^n-1}{2-1}\right)^2-\frac{4^n-1}{4-1}$$

$$=(2^n-1)^2-\frac{(2^n-1)(2^n+1)}{3}=\frac{2(2^n-1)(2^n-2)}{3}$$

$$\therefore a_{n,2}=\frac{(2^n-1)(2^n-2)}{3}\ \cdots\cdots(答)$$

(2)

$n\geqq k\geqq 2$のとき、$a_{n,k}$について以下の漸化式が成り立つ。 $a_{n+1,k}=a_{n,k}+2^na_{n,k-1}$ ——①

$a_{n,1}=2^0+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}$であるから　$a_{n+1,1}=a_{n,1}+2^n$

$a_{n,n}=2^0\cdot2^1\cdot2^2\cdot\cdots\cdot2^{n-1}$であるから　$a_{n+1,n+1}=2^na_{n,n}$

これらを代入すると

$$f_{n+1}(x)=1+\left(a_{n,1}+2^n\right)x+\left(a_{n,2}+2^na_{n,1}\right)x^2+\cdots+\left(a_{n,n}+2^na_{n,n-1}\right)x^n+2^na_{n,n}x^{n+1}$$
$$=(1+2^nx)\left(1+a_{n,1}x+a_{n,2}x^2+\cdots+a_{n,n-1}x^{n-1}+a_{n,n}x^n\right)=(1+2^nx)f_n(x)$$

$$\therefore\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}=1+2^nx\ \cdots\cdots(答)$$

次に、$f_1(x)=1+a_{1,1}x=1+x$であるから、$f_{n+1}(x)=(1+2^nx)f_n(x)$を繰り返し用いると

$$f_{n+1}(x)=(1+2^nx)(1+2^{n-1}x)\cdots(1+2x)(1+x)$$

$f_n(x)=(1+2^{n-1}x)\cdots(1+2x)(1+x)$であるから、$x$を$2x$で置き換えると

$$f_n(2x)=(1+2^nx)\cdots(1+2^2x)(1+2x)\qquad\therefore\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(2x)}=1+x\ \cdots\cdots(答)$$

(3)

$$f_{n+1}(x)=(1+x)f_n(2x)=(1+x)\left(1+2a_{n,1}x+2^2a_{n,2}x^2+\cdots+2^{n-1}a_{n,n-1}x^{n-1}+2^na_{n,n}x^n\right)$$
$$=1+\left(1+2a_{n,1}\right)x+\left(2a_{n,1}+2^2a_{n,2}\right)x^2+\cdots+\left(2^{n-1}a_{n,n-1}+2^na_{n,n}\right)x^n+2^na_{n,n}x^{n+1}$$

$f_{n+1}(x)=1+a_{n+1,1}x+a_{n+1,2}x^2+\cdots+a_{n+1,n}x^n+a_{n+1,n+1}x^{n+1}$より、係数を比較すると

$$a_{n+1,k+1}=2^{k+1}a_{n,k+1}+2^ka_{n,k}\ ——②$$

①より、$a_{n+1,k+1}=a_{n,k+1}+2^na_{n,k}$であるから、$a_{n,k+1}$を消去すると

$$(2^{k+1}-1)a_{n+1,k+1}=(2^{n+k+1}-2^k1)a_{n,k}\qquad\therefore\frac{a_{n+1,k+1}}{a_{n,k}}=\frac{2^k(2^{n+1}-1)}{2^{k+1}-1}\ \cdots\cdots(答)$$