2021年東大文$\boxed{1}$

曲線C上の点(t, at^3-2t)が、原点を中心とする半径1の円上にあるとき

$t^2+(at^3-2t)^2=a^2t^6-4at^4+5t^2=1 \quad a^2t^6-4at^4+5t^2-1=0$

$f(t)=a^2t^6-4at^4+5t^2-1$とおく。6次方程式$f(t)=0$が、相違なる6個の実数解を持つ条件を考える。

$f'(t)=6a^2t^5-16at^3+10t=2t(3at^2-5)(at^2-1)$　　増減は下の通り。

	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{5}{3a}}$	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{1}{a}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{1}{a}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{5}{3a}}$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	-1	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$f(0)=-1<0$であり、

$$f\left(\pm\sqrt{\frac{5}{3a}}\right)=\frac{125}{27a}-\frac{100}{9a}+\frac{25}{3a}-1=\frac{125-300+225}{27a}-1=\frac{50}{27a}-1 \quad f\left(\pm\sqrt{\frac{1}{a}}\right)=\frac{1}{a}-\frac{4}{a}+\frac{5}{a}-1=\frac{2}{a}-1$$

$f(t)=0$が、相違なる6個の実数解を持つ条件は

$\dfrac{2}{a}-1>0, \dfrac{50}{27a}-1<0 \quad \therefore \dfrac{50}{27}<a<2$ ……(答)

※上記の$f(t)=0$は、t^2に関する3次方程式と考えてもよい。

図形的には考えにくい。