

2021 年東大文 [2]

1 から $2N$ までの番号が付いた横一行のマス目があり、選んだ番号のマス目には●を書くとする。

(1)

i) すべての●と●の間が 1 マス空く。

ii) いずれか 1 箇所の●と●の間が 2 マス空き、他はすべて 1 マス空く。

のいずれかである。●と●の間は $N - 1$ 箇所あり、「1」は必ず選ばれる。

条件 1 を満たす選び方の総数は $\therefore 1 + (N - 1) = N$ 通り …… (答)

(2)

i) 連続する $N - 2$ 個の整数からなる集合に、「1」を含む。

ii) 連続する $N - 2$ 個の整数からなる集合に、「1」を含まない。

のいずれかである。

i) のとき

まず、番号「1」から「 $N - 2$ 」までのマス目に●を書く。次に、番号「 $N - 1$ 」から「 $2N$ 」までの $N + 2$ 個のマス目のうち、いずれか 2 個に●を書く。

このような選び方の総数は $\therefore {}_{N+2}C_2 = \frac{(N+2)(N+1)}{2}$ 通り

ii) のとき

a)

番号「1」と、「1」と隣接しない連続した $N - 1$ 個のマス目に●を書く。

連続した $N - 1$ 個の整数からなる集合の選び方は、 $\{3, 4, \dots, N + 1\}$ から $\{N + 2, N + 3, \dots, 2N\}$ までの N 通り。

a) の場合の選び方の総数は $\therefore N$ 通り

b)

番号「1」と、「1」と隣接しない連続した $N - 2$ 個のマス目に●を書く。

連続した $N - 2$ 個の整数からなる集合の選び方は、 $\{3, 4, \dots, N\}$ から $\{N + 3, N + 4, \dots, 2N\}$ までの $N + 1$ 通り。

最後に、●が $N - 2$ 個並んだマス目と隣接しない、いずれか 1 個のマス目に●を書く。「1」と隣接してもよい。

連続した $N - 2$ 個の整数が、 $\{3, 4, \dots, N\}$ から $\{N + 2, N + 3, \dots, 2N - 1\}$ までの N 通りのいずれかの場合

残り 1 個の●を書けるマス目は、 $2N - 1 - (N - 2) - 2 = N - 1$ 個。

連続した $N - 2$ 個の整数が、 $\{N + 3, N + 4, \dots, 2N\}$ である場合

残り 1 個の●を書けるマス目は、 $2N - 1 - (N - 2) - 1 = N$ 個。

b) の場合の選び方の総数は $\therefore N(N - 1) + N = N^2$ 通り

条件 2 を満たす選び方の総数は $\therefore \frac{(N+2)(N+1)}{2} + N + N^2 = \frac{1}{2}(N+1)(3N+2)$ 通り …… (答)