2022年東大文 $\boxed{1}$

(1)

原点を通る直線$y = mx$が、放物線Cに接する条件を考える。

$x^2 + ax + b = mx \quad x^2 - (m-a)x + b = 0 \quad D = (m-a)^2 - 4b = 0$

$D = 0$を満たす実数mが2つ存在するには、$b > 0$でなければならない。

$b > 0$のとき　$m - a = \pm 2\sqrt{b} \quad m = a \pm 2\sqrt{b}$

$m_1 = a - 2\sqrt{b}, m_2 = a + 2\sqrt{b}$とすると、$m_1 m_2 = -1$より

$m_1 m_2 = a^2 - 4b = -1 \quad \therefore b = \dfrac{a^2+1}{4}$ ……(答)

aの値に関わらず$b > 0$となるから、aの値はすべての実数をとりうる。

(2)

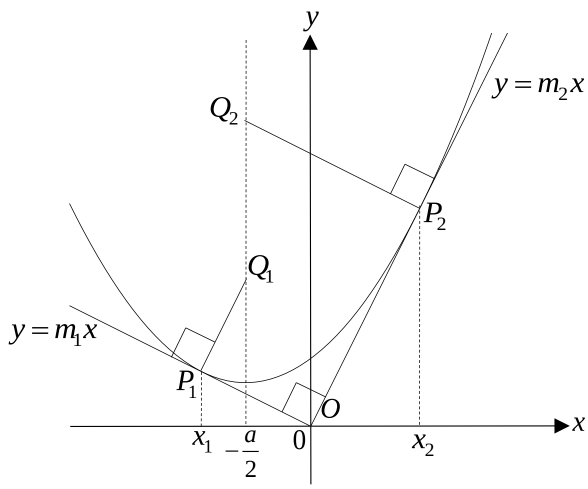
$x^2 - (m_1 - a)x + b = x^2 + 2\sqrt{b}x + b = \left(x + \sqrt{b}\right)^2 = 0$ より　$\therefore x = -\sqrt{b} = -\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2}$

$x^2 - (m_2 - a)x + b = x^2 - 2\sqrt{b}x + b = \left(x - \sqrt{b}\right)^2 = 0$ より　$\therefore x = \sqrt{b} = \dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2}$

P_1のx座標x_1は$-\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2}$、P_2のx座標x_2は$\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2}$となり、$x_1 = -x_2$である。

円D_1, D_2の中心をQ_1, Q_2とする。

P_1Q_1はOP_2と平行であり、P_2Q_2はOP_1と平行である。



l_1, l_2の傾きをそれぞれm_1, m_2とする。

$P_1Q_1 = \left|-\dfrac{a}{2} - x_1\right|\sqrt{{m_2}^2 + 1} = \left|x_2 - \dfrac{a}{2}\right|\sqrt{{m_2}^2+1}$

$P_2Q_2 = \left|x_2 + \dfrac{a}{2}\right|\sqrt{\dfrac{1}{{m_2}^2} + 1} = \left|x_2 + \dfrac{a}{2}\right|\dfrac{\sqrt{{m_2}^2+1}}{m_2}$

$P_2Q_2 = 2P_1Q_1$であるから

$\left|x_2 + \dfrac{a}{2}\right|\dfrac{\sqrt{{m_2}^2+1}}{m_2} = 2\left|x_2 - \dfrac{a}{2}\right|\sqrt{{m_2}^2+1} \quad \left|x_2 + \dfrac{a}{2}\right| = 2m_2\left|x_2 - \dfrac{a}{2}\right|$

$\left|\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2} + \dfrac{a}{2}\right| = 2\left(\sqrt{a^2+1} + a\right)\left|\dfrac{\sqrt{a^2+1}}{2} - \dfrac{a}{2}\right| \quad \left(\sqrt{a^2+1} + a\right) = 2\left(\sqrt{a^2+1} + a\right)\left(\sqrt{a^2+1} - a\right)$

$2\left(\sqrt{a^2+1} - a\right) = 1 \quad \sqrt{a^2+1} = \dfrac{1}{2} + a \quad \dfrac{1}{2} + a > 0$ として　$a^2 + 1 = \dfrac{1}{4} + a + a^2 \quad a = \dfrac{3}{4}$

これは$\dfrac{1}{2} + a > 0$を満たすので　$\therefore a = \dfrac{3}{4}$ ……(答)