2022年東大文$\boxed{4}$　※2024.2.8（2)を修正しました。

$\vec{a}=(1,0),\vec{b}=\left(-\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right),\vec{c}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$とする。$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$より、コインを$N$回投げた後$X_N$が$O$にあるためには、$\vec{a},\vec{b},\vec{c}$方向への移動回数が、同じでなければならない。すなわち、N回中表が出る回数が3の倍数でなければならない。

n回目に表が出たとき、$n-1$回目までに裏が出た回数を3で割った余りが、0であれば$\vec{a}$方向に移動し、1であれば$\vec{b}$方向に移動し、2であれば$\vec{c}$方向に移動する。

(1)

表が出る回数は、0回、3回のいずれかである。

表が出る回数が0回である場合は1通り。

表が出る回数が3回である場合は表・裏・表・裏・表の1通り。

すべての裏表の出方は$2^5=32$通りであるから、求める確率は　$\frac{1+1}{32}=\frac{1}{16}\cdots\cdots$(答)

(2)

$i)$ 裏が0回、3回、6回出た後

$ii)$ 裏が1回、4回、7回出た後

$iii)$ 裏が2回、5回、8回出た後

i)～iii)のそれぞれについて、30回ずつ表が出ることが条件である。

例えばi)の場合、30個の「表」を分割して0回後、3回後、6回後に振り分けると考える。

このような「表」の置き方は、32箇所のうちいずれか2箇所に仕切りを置く置き方の総数に等しく、${}_{32}C_2$通り。

i)～iii)のそれぞれについて、30回ずつ表が出る場合は、$({}_{32}C_2)^3=(16\cdot 31)^3=2^{12}\cdot 31^3$通り。

すべての裏表の出方は2^{98}通りであるから、求める確率は　$\frac{2^{12}\cdot 31^3}{2^{98}}=\frac{31^3}{2^{86}}\cdots\cdots$(答)