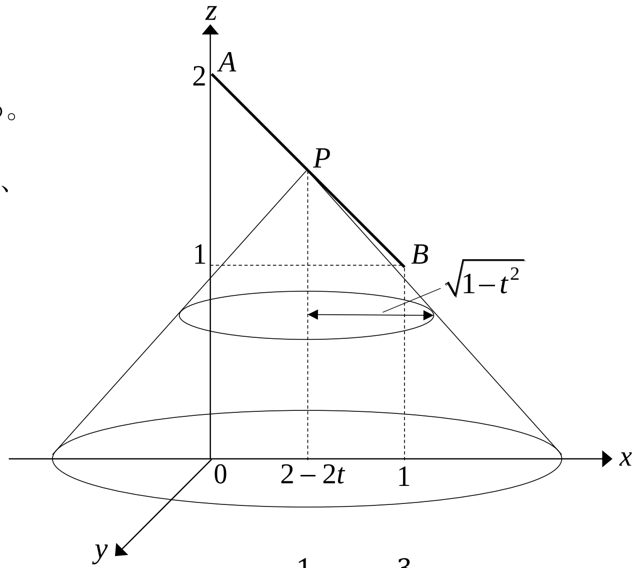
2022 年東大理 $\boxed{5}$



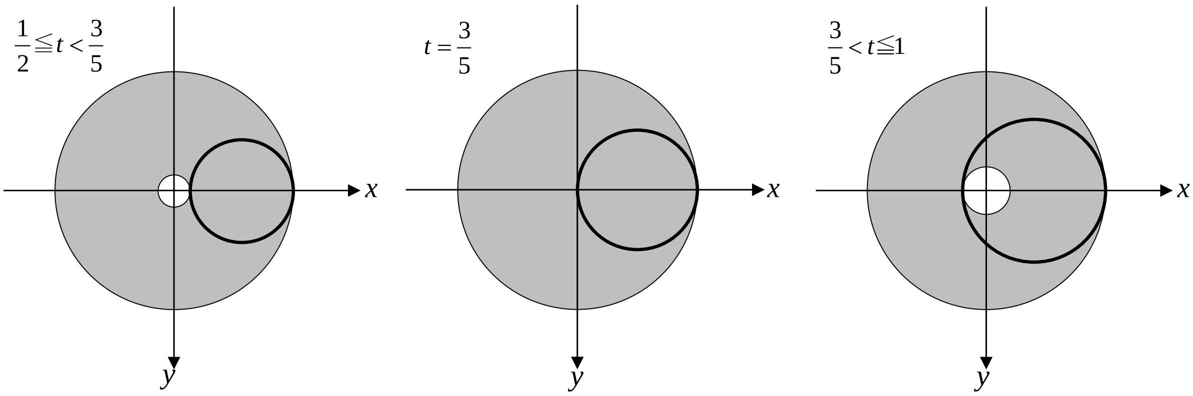
線分AB上の点$P(2-2t,2t)\left(\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1\right)$を、固定して考える。

このとき、xy平面上の点Qは、中心の座標が$(2-2t,0,0)$で、
半径が$\sqrt{2^2-(2t)^2}=2\sqrt{1-t^2}$の円周上を動く。
相似性より、線分PQの中点Mは平面$z=t$上にあり、
中心の座標が$(2-2t,0,t)$で、半径$\sqrt{1-t^2}$の円周上を動く。
この円をCとする。Kの$z=t$における断面は、Cをz軸中心
に回転したときにCが通過する部分である。

ここで、$2-2t\geqq\sqrt{1-t^2}$を解くと

$$4(1-t)^2\geqq(1-t)(1+t)\quad (1-t)\{4(1-t)-(1+t)\}=(1-t)(3-5t)\geqq 0\quad \therefore\frac{1}{2}\leqq t\leqq\frac{3}{5},t=1$$

$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{5}$のとき、$z$軸は$C$の外部を通る。$\dfrac{3}{5}\leqq t\leqq 1$ のとき、z軸はCの内部を通る(周上を含む)。



いずれにしても、Kの$z=t$における断面はドーナツ型となり$\left(t=\dfrac{3}{5}\text{のときのみ円型}\right)$、断面積$S(t)$は

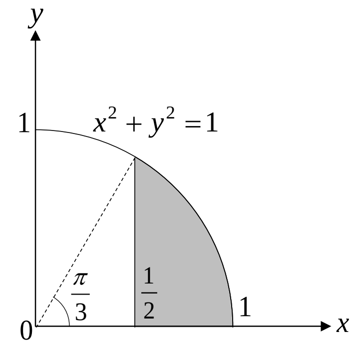
$$S(t)=\pi\left\{(2-2t)+\sqrt{1-t^2}\right\}^2-\pi\left\{(2-2t)-\sqrt{1-t^2}\right\}^2=8\pi(1-t)\sqrt{1-t^2}$$

で与えられる。求める体積は

$$8\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\sqrt{1-t^2}dt=8\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}dt-8\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}t\sqrt{1-t^2}dt$$

$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}dt$は右図の網掛部の面積に等しい。$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\sqrt{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}t\sqrt{1-t^2}dt=-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t^2)'\sqrt{1-t^2}dt=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$



以上により、求める体積は　$8\pi\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}-\dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)=\dfrac{4}{3}\pi^2-2\sqrt{3}\pi$ ……(答)