2023 年東大文 $\boxed{2}$

(1)

点と直線の距離の公式により　$f(t)=\dfrac{|2\cdot t-(3t^2-4t)|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\dfrac{3|t^2-2t|}{\sqrt{5}}$

$t^2-2t=t(t-2)$より　$-1\leqq t\leqq 0$ のとき$t^2-2t\geqq 0$　$0\leqq t\leqq 2$ のとき$t^2-2t\leqq 0$

$-1\leqq a\leqq 0$ のとき

$$g(a)=\frac{3}{\sqrt{5}}\int_{-1}^{a}(t^2-2t)dt=\frac{3}{\sqrt{5}}\left[\frac{t^3}{3}-t^2\right]_{-1}^{a}=\frac{3}{\sqrt{5}}\left(\frac{a^3}{3}-a^2+\frac{4}{3}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2+4)$$

$0\leqq a\leqq 2$ のとき

$$g(a)=\frac{3}{\sqrt{5}}\int_{-1}^{0}(t^2-2t)dt+\frac{3}{\sqrt{5}}\int_{0}^{a}(-t^2+2t)dt=\frac{3}{\sqrt{5}}\left[\frac{t^3}{3}-t^2\right]_{-1}^{0}+\frac{3}{\sqrt{5}}\left[-\frac{t^3}{3}+t^2\right]_{0}^{a}$$

$$=\frac{3}{\sqrt{5}}\cdot\frac{4}{3}+\frac{3}{\sqrt{5}}\left(-\frac{a^3}{3}+a^2\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}(-a^3+3a^2+4)$$

以上により

$-1\leqq a\leqq 0$ のとき $g(a)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(a^3-3a^2+4)$　$0\leqq a\leqq 2$ のとき $g(a)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-a^3+3a^2+4)$　……(答)

(2)

$h(a)=g(a)-f(a)$とする。$0\leqq a\leqq 2$ のとき、$g(a)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(-a^3+3a^2+4)$であるから

$$h(a)=\frac{1}{\sqrt{5}}(-a^3+3a^2+4)-\frac{3(-a^2+2a)}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}(-a^3+6a^2-6a+4)$$

$$h'(a)=\frac{1}{\sqrt{5}}(-3a^2+12a-6)=-\frac{3}{\sqrt{5}}(a^2-4a+2)=-\frac{3}{\sqrt{5}}\{a-(2+\sqrt{2})\}\{a-(2-\sqrt{2})\}$$

$h(a)$の $0\leqq a\leqq 2$ における増減は右の通りで、$a=2-\sqrt{2}$のとき極小。

a	0	$\cdots$	$2-\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$h'(a)$		$-$	0	$+$	
$h(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$h(a)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}\{(a^2-4a+2)(-a+2)+4a\}$より

$f(2-\sqrt{2})=\dfrac{4(2-\sqrt{2})}{\sqrt{5}}$　$h(0)=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$　$h(2)=\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

最大値は$\dfrac{8}{\sqrt{5}}$、最小値は$\dfrac{4(2-\sqrt{2})}{\sqrt{5}}$　……(答)