2023 年東大理 $\boxed{3}$

(1)

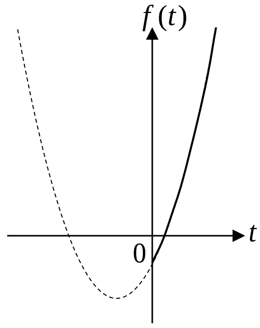
Cと$y=x^2$が共有点を持たない。Cの方程式$x^2+(y-a)^2=1$に、$y=x^2$を代入すると

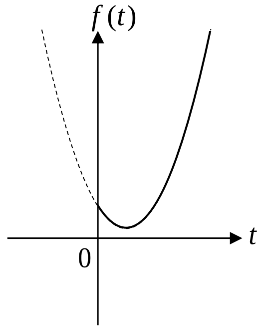
$x^2+(x^2-a)^2=x^4-(2a-1)x^2+a^2=1 \quad x^4-(2a-1)x^2+a^2-1=0$——①

①はx^2に関する二次方程式であるから、二次方程式$f(t)=t^2-(2a-1)t+a^2-1=0$が、非負実数解を

0 持たない条件を考える。

$f(t)=\left\{t-\left(a-\frac{1}{2}\right)\right\}^2+a-\frac{5}{4}$より





軸$a-\frac{1}{2}\leqq 0 \quad a\leqq\frac{1}{2}$のとき　$f(0)=a^2-1<0$ であるから、不適。

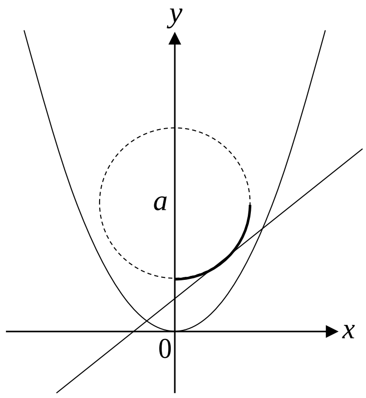
軸$a-\frac{1}{2}>0 \quad a>\frac{1}{2}$のとき　$f\left(a-\frac{1}{2}\right)=a-\frac{5}{4}>0$ であればよい。

求める条件は　$\therefore a>\frac{5}{4}$ ……(答)

(2)

S上の点Pにおける接線の傾きをm、切片をkとする。点$(0,a)$と接線の距離が 1 であるから

$$\frac{|m\cdot 0-a+k|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|k-a|}{\sqrt{m^2+1}}=1 \quad k-a=\pm\sqrt{m^2+1}$$



kはaより小さいから　$k=a-\sqrt{m^2+1}$

$x^2=mx+a-\sqrt{m^2+1}$の 2 解を$\alpha,\beta(\alpha<\beta)$とすると、解と係数の関係より

$\alpha+\beta=m, \alpha\beta=-a+\sqrt{m^2+1}$

$$\begin{aligned}{L_P}^2&=(\alpha-\beta)^2+(\alpha^2-\beta^2)^2=(\alpha-\beta)^2\{1+(\alpha+\beta)^2\}\\&=\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}\{1+(\alpha+\beta)^2\}=(m^2+4a-4\sqrt{m^2+1})(1+m^2)\\&=(1+m^2)^2-4(1+m^2)\sqrt{m^2+1}+(4a-1)(1+m^2)\end{aligned}$$

$X=\sqrt{m^2+1}$とすると$X\geqq 1$であり、${L_P}^2=X^4-4X^3+(4a-1)X^2$となる。

4 次関数$F(X)=X^4-4X^3+(4a-1)X^2$が、$X\geqq 1$の範囲の異なるXで同じ値をとれば、題意を満たす。

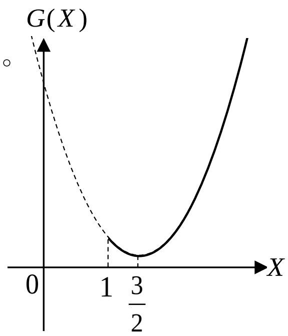
すなわち、$F(X)$が$X\geqq 1$において極値を持てばよい。

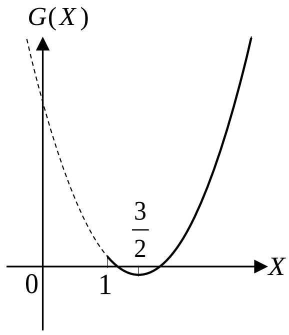
$F'(X)=4X^3-12X^2+2(4a-1)X=2X\{2X^2-6X+(4a-1)\}$

$F(X)$が$X\geqq 1$において極値を持つには、$X\geqq 1$において$F'(X)$の符号が変わる必要がある。

すなわち、$X\geqq 1$において$F'(X)=0$が解を持つことが条件である。

$G(X)=2X^2-6X+(4a-1)=2\left(X-\frac{3}{2}\right)^2+4a-\frac{11}{2}=0$とする。





軸$X=\frac{3}{2}$は$X\geqq 1$の範囲にあるから　$G\left(\frac{3}{2}\right)=4a-\frac{11}{2}<0$

$\therefore a<\frac{11}{8}$　求める範囲は　$\therefore \frac{5}{4}<a<\frac{11}{8}$ ……(答)