2023年東大理$\boxed{4}$

(1)

$P(p,q,r)$とすると

$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OA}$より　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=2p=0$　$\therefore p=0$　$\overrightarrow{OP}\perp\overrightarrow{OB}$より　$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=q+r=0$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OC}=2q+3r=1$　$\therefore q=-1, r=1$　Pの座標は$(0,-1,1)$ ……(答)

(2)

直線AB上の点は、$(1-\mathrm{t})\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=(1-t)\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-t\\t\\t\end{pmatrix}$と表せる。

$\overrightarrow{OH}=(2-t,t,t)$とすると　$\overrightarrow{PH}=(2-t,t+1,t-1)$　$\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{AB}=-2+t+t+1+t-1=3t-2=0$

$\therefore t=\dfrac{2}{3}$　したがって　$\therefore \overrightarrow{OH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}$ ……(答)

(3)

三角形OHB上の点Rは、実数$s,t(0\leqq s\leqq 1, 0\leqq t\leqq 1, 0\leqq s+t\leqq 1)$を用いて、$\overrightarrow{OR}=s\overrightarrow{OH}+t\overrightarrow{OB}$と表せる。

$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}=s\overrightarrow{OH}+t\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OQ}=s\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OB}\right)+t\overrightarrow{OB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=\left(\dfrac{1}{3}s-\dfrac{3}{4}\right)\overrightarrow{OA}+\left(\dfrac{2}{3}s+t\right)\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}$

$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ であるから

$$\left|\overrightarrow{QR}\right|^2=\left(\frac{1}{3}s-\frac{3}{4}\right)^2\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+\left(\frac{2}{3}s+t\right)^2\left|\overrightarrow{OB}\right|^2+\left|\overrightarrow{OP}\right|^2+2\left(\frac{1}{3}s-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{2}{3}s+t\right)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$$

$$=4\left(\frac{1}{9}s^2-\frac{1}{2}s+\frac{9}{16}\right)+3\left(\frac{4}{9}s^2+\frac{4}{3}st+t^2\right)+2+4\left(\frac{2}{9}s^2+\frac{1}{3}st-\frac{1}{2}s-\frac{3}{4}t\right)$$

$$=\frac{8}{3}s^2+\frac{16}{3}st+3t^2-4s-3t+\frac{17}{4}=\frac{8}{3}(s+t)^2-4(s+t)+\frac{1}{3}t^2+t+\frac{17}{4}$$

$$=\frac{8}{3}\left(s+t-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{3}\left(t+\frac{3}{2}\right)^2+2$$

$\left|\overrightarrow{QR}\right|^2$が最小になるのは、$s+t=\dfrac{3}{4}$かつ$t=0$、$s=\dfrac{3}{4}, t=0$ のときで、最小値は$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{9}{4}+2=\dfrac{11}{4}$

$\left|\overrightarrow{QR}\right|^2$が最大になるのは、$R$が頂点$O,H,B$のいずれかに一致したときである。

$R=O$のとき　$s=t=0$　$\left|\overrightarrow{QR}\right|^2=\dfrac{17}{4}$　$R=H$のとき　$s=1,t=0$　$\left|\overrightarrow{QR}\right|^2=\dfrac{1}{6}+\dfrac{3}{4}+2=\dfrac{35}{12}$

$R=B$のとき　$s=0,t=1$　$\left|\overrightarrow{QR}\right|^2=\dfrac{1}{6}+\dfrac{25}{12}+2=\dfrac{17}{4}$　したがって、最大値は$\dfrac{17}{4}$

rが$\left|\overrightarrow{QR}\right|$の最小値以上かつ最大値以下であればよいから　$\therefore \dfrac{\sqrt{11}}{2}\leqq r\leqq\dfrac{\sqrt{17}}{2}$ ……(答)