2023年東大理 $\boxed{5}$

(1)

$g(x)=Q(x)f(x)+r(x)$と書ける。$r(x)$は2次以下の整式である。

$$g(x)^7=\{Q(x)f(x)+r(x)\}^7=\sum_{n=0}^{7}{}_7C_n\{Q(x)f(x)\}^{7-n}r(x)^n=\sum_{n=0}^{6}{}_7C_n\{Q(x)f(x)\}^{7-n}r(x)^n+r(x)^7$$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{6}{}_7C_n\{Q(x)f(x)\}^{7-n}r(x)^n$ は$f(x)$で割り切れる。

したがって、$g(x)^7$を$f(x)$で割った余りは、$r(x)^7$を$f(x)$で割った余りに等しい。(証明終)

(2)

$h(x)^7=Q(x)f(x)+h_1(x)$と書ける。

(1)で示した通り、$h(x)^{49}$を$f(x)$で割った余りは、$h_1(x)^7$を$f(x)$で割った余りに等しい。

$h_1(x)^7$を$f(x)$で割った余りが$h(x)$に等しいから、$h(x)^{49}$を$f(x)$で割った余りも$h(x)$に等しい。

これより、$h(x)^{49}-h(x)$は$f(x)$で割り切れる。

$h(x)^{49}-h(x)=Q(x)f(x)=Q(x)(x-1)^2(x-2)$と書ける。$x=1,2$を代入すると

$h(1)^{49}-h(1)=0$ ——① $h(2)^{49}-h(2)=0$ ——②

$h(x)^{49}-h(x)=Q(x)(x-1)^2(x-2)$の両辺を微分すると

$$49h(x)^{48}\cdot h'(x)-h'(x)=Q'(x)(x-1)^2(x-2)+2Q(x)(x-1)(x-2)+Q(x)(x-1)^2$$

$x=1$を代入して $h'(1)\{49h(1)^{48}-1\}=0$ ——③

①、②、③が同時に成り立つ必要がある。

①より $h(1)\{h(1)^{48}-1\}=h(1)\{h(1)^2-1\}\{h(1)^{46}+h(1)^{44}+\cdots+h(1)^2+1\}=0$

$h(1)$は実数であるから $\therefore h(1)=-1,0,1$

同様に②より $\therefore h(2)=-1,0,1$

③より $h'(1)=0$ または$h(1)^{48}=\dfrac{1}{49}$であるが、①より$h'(1)=0$に限られる。

$h'(x)=2x+a$より $h'(1)=2+a=0$ $\therefore a=-2$

$h(x)=x^2-2x+b$より $h(1)=b-1$ $h(2)=b$

$h(1)=0$とすると$b=1$であるから、$h(2)=1$を満たし、①、②、③が同時に成り立つ。

$h(1)=1$とすると$b=2$であるから、$h(2)=2$となり不適。

$h(1)=-1$とすると$b=0$であるから、$h(2)=0$を満たし、①、②、③が同時に成り立つ。

$h(2)=-1$とすると$b=-1$であるから、$h(1)=-2$となり不適。

以上により、求める組は $\therefore (a,b)=(-2,0),(-2,1)$ ……(答)