2024年東大文 $\boxed{1}$

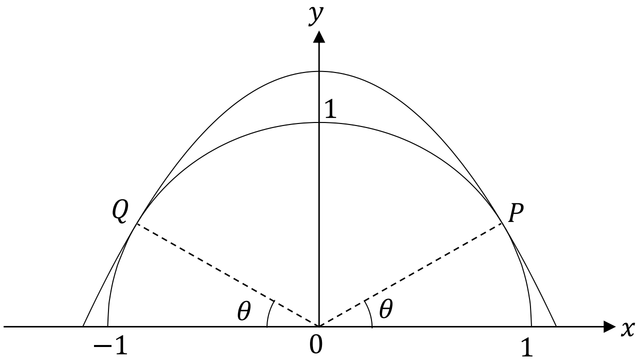
(1)

放物線が点P, Qを通るから

$\sin\theta = a\cos^2\theta + b\cos\theta + c$ ──① $\sin\theta = a\cos^2\theta - b\cos\theta + c$ ──②

①−②より $2b\cos\theta = 0$ $\cos\theta \neq 0$ より $\therefore b = 0$

原点をOとすると、OPの傾きは$\tan\theta$である。



Pにおける円の接線の傾きは、$-\dfrac{1}{\tan\theta}$であるから

$$2a\cos\theta = -\frac{1}{\tan\theta} = -\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad \therefore a = -\frac{1}{2\sin\theta} = -\frac{1}{2s}$$

$$c = \sin\theta - a(1-\sin^2\theta) = s + \frac{1-s^2}{2s} = \frac{1}{2}\left(s + \frac{1}{s}\right)$$

以上により $\therefore a = -\dfrac{1}{2s}, b = 0, c = \dfrac{1}{2}\left(s + \dfrac{1}{s}\right)$ ……(答)

(2)

$-\dfrac{1}{2s}x^2 + \dfrac{1}{2}\left(s + \dfrac{1}{s}\right) = 0$ とすると $x^2 = s^2 + 1$ $x = \pm\sqrt{s^2+1}$

$$A = \int_{-\sqrt{s^2+1}}^{\sqrt{s^2+1}} \left(-\frac{1}{2s}x^2 + \frac{s^2+1}{2s}\right)dx = \frac{1}{s}\int_0^{\sqrt{s^2+1}}(-x^2+s^2+1)dx = \frac{1}{s}\left[-\frac{x^3}{3} + (s^2+1)x\right]_0^{\sqrt{s^2+1}}$$

$$= \frac{2(s^2+1)^{\frac{3}{2}}}{3s}$$ ……(答)

(3)

$$A^2 = \frac{4(s^2+1)^3}{9s^2} = \frac{4(s^6+3s^4+3s^2+1)}{9s^2} = \frac{4}{9}\left(s^4 + 3s^2 + 3 + \frac{1}{s^2}\right)$$

$t = s^2$とすると $0 < t < 1$ である。$f(t) = t^2 + 3t + 3 + \dfrac{1}{t}$ とすると

$$f'(t) = 2t + 3 - \frac{1}{t^2} = \frac{2t^3+3t^2-1}{t^2} = \frac{(2t-1)(t+1)^2}{t^2}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		↘		↗	

$f(t)$の増減は右の通りで、$t = \dfrac{1}{2}$のとき最小となる。

$f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2} + 3 + 2 = \dfrac{27}{4}$ より $A^2 \geqq \dfrac{4}{9}\cdot\dfrac{27}{4} = 3$ $\therefore A \geqq \sqrt{3}$ (証明終)

※(3)は微分しなくても解けるようだが、微分した方が早いのでは。