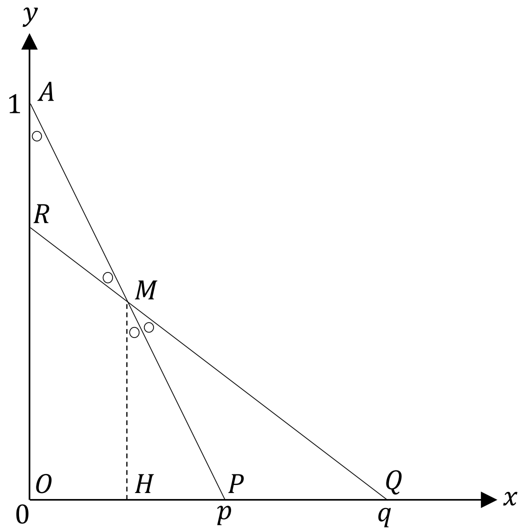
2024年東大文$\boxed{3}$

(1)

線分QMの延長がy軸と交差する点をR、
Mからx軸に下した垂線の足をHとする。



$\angle OAP=\theta$とすると、$\tan\theta=p$である。
このとき、$\angle PMQ=\angle RMA=\theta$であるから、
$\angle ORQ=2\theta, \angle HMQ=\angle ORQ=2\theta$である。

$\therefore QH=MH\tan 2\theta$

$QH=q-\dfrac{p}{2}, MH=\dfrac{1}{2}$より　$q-\dfrac{p}{2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\dfrac{p}{1-p^2}$

$\therefore q=\dfrac{p}{2}+\dfrac{p}{1-p^2}=\dfrac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}$ ……(答)

(2)

$\dfrac{1}{3}=\dfrac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}$より　$3p(3-p^2)=2(1-p^2)$　$3p^3-2p^2-9p+2=(p-2)(3p^2+4p-1)=0$

$3p^2+4p-1=0$を解くと　$p=\dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$　$0<p<1$より　$\therefore p=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$ ……(答)

$\dfrac{1}{3}-\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}=\dfrac{3-\sqrt{7}}{3}>0$より、$p<q$も満たす。

(3)

$S=\dfrac{p}{2}, T=\dfrac{1}{4}(q-p)$より　$\dfrac{p}{2}>\dfrac{1}{4}(q-p)$　$2p>q-p$　$q-3p<0$

$\dfrac{p(3-p^2)}{2(1-p^2)}-3p<0$　$p(3-p^2)-6p(1-p^2)<0$　$5p^3-3p=p(5p^2-3)<0$

$0<p<1, p^2<\dfrac{3}{5}$より　$\therefore 0<p<\dfrac{\sqrt{15}}{5}$ ……(答)