2025 年東大文 $\boxed{1}$

(1)

PにおけるCの接線の傾きは $2a$であるから、lの方程式は　$y=-\dfrac{1}{2a}(x-a)+a^2=-\dfrac{1}{2a}x+a^2+\dfrac{1}{2}$

$x^2=-\dfrac{1}{2a}x+a^2+\dfrac{1}{2}$とすると　$x^2+\dfrac{1}{2a}x-a^2-\dfrac{1}{2}=(x-a)\left(x+a+\dfrac{1}{2a}\right)=0$

Qのx座標は　$\therefore -a-\dfrac{1}{2a}\cdots\cdots$(答)

(2)

$b=-a-\dfrac{1}{2a}$とすると、Rのx座標は$-b-\dfrac{1}{2b}$であるから

$$-b-\frac{1}{2b}=a+\frac{1}{2a}+\frac{1}{2\left(a+\frac{1}{2a}\right)}=a+\frac{1}{2a}+\frac{a}{2a^2+1}$$

$f(a)=a+\dfrac{1}{2a}+\dfrac{a}{2a^2+1}$とすると

$$f'(a)=1-\frac{1}{2a^2}+\frac{2a^2+1-a\cdot 4a}{(2a^2+1)^2}=\frac{2a^2(2a^2+1)^2-(2a^2+1)^2+2a^2(1-2a^2)}{2a^2(2a^2+1)^2}$$

$$=\frac{8a^6+8a^4+2a^2-4a^4-4a^2-1+2a^2-4a^4}{2a^2(2a^2+1)^2}=\frac{8a^6-1}{2a^2(2a^2+1)^2}=\frac{(2a^2-1)(4a^4+2a^2+1)}{2a^2(2a^2+1)^2}$$

$f(a)$の増減は右の通りで、$a^2=\dfrac{1}{2}$、$a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$のとき極小。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		↘		↗

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{5\sqrt{2}}{4}$$

Rのx座標の最小値は　$\therefore \dfrac{5\sqrt{2}}{4}\cdots\cdots$(答)

※何の工夫もなく計算で押し切った。

$b\leqq -\sqrt{2}$の範囲で、$-b-\dfrac{1}{2b}$の最小値を求めればよい。