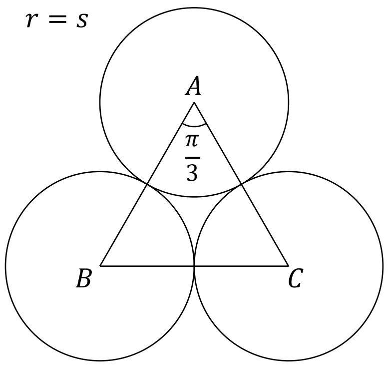
2025年東大文$\boxed{2}$

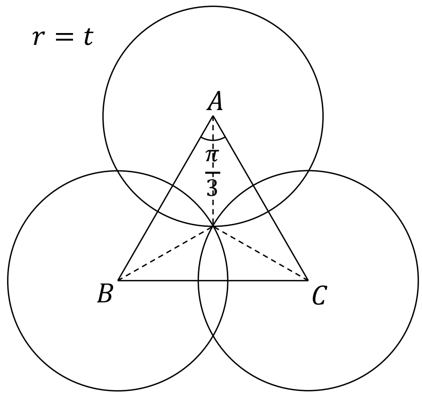
A, B, Cを中心とする半径rの円を、それぞれC_A, C_B, C_Cとする。

(1)

三角形ABCは正三角形であり、C_A, C_B, C_Cが互いに接するとき、3辺がD_rに含まれる。　$\therefore s = \dfrac{1}{2}$ ⋯⋯(答)

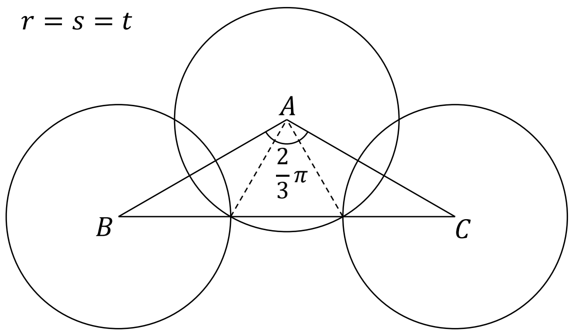
C_A, C_B, C_Cの円周が、正三角形ABCの外心を通るとき、正三角形ABCがD_rに含まれる。　$\therefore t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ⋯⋯(答)





(2)

三角形ABCは鈍角三角形である。$r = \dfrac{1}{2}$のとき、C_AはBCに接する。rがさらに大きくなると、C_Aの内部に、BCの一部も含まれる。下図のように、C_AとC_Bの円周、C_AとC_cの円周が、それぞれBC上で交差するとき、3辺がD_rに含まれ、同時に正三角形ABCがD_rに含まれる。　$r = \dfrac{1}{2\cos\frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$\therefore s = t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ ⋯⋯(答)

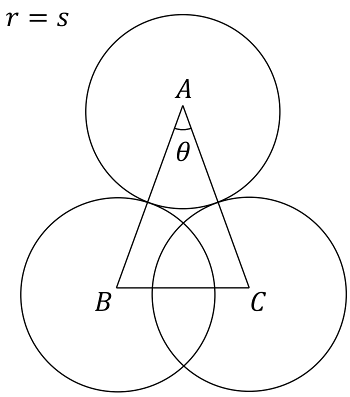


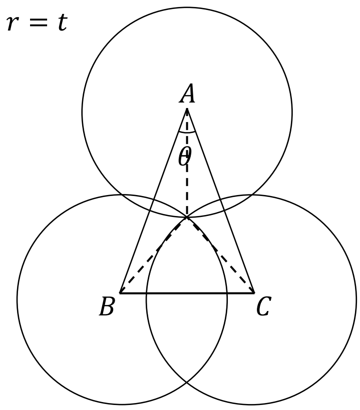
(3)

$BC = 2\sin\dfrac{\theta}{2}$である。$0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$のとき、$BC < 1$であるから

C_AとC_B、C_AとC_CがそれぞれAB上、AC上で接するとき、3辺がD_rに含まれる。　$\therefore s = \dfrac{1}{2}$

C_A, C_B, C_Cの円周が、三角形ABCの外心を通るとき、三角形ABCがD_rに含まれる。　$\therefore t = \dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$

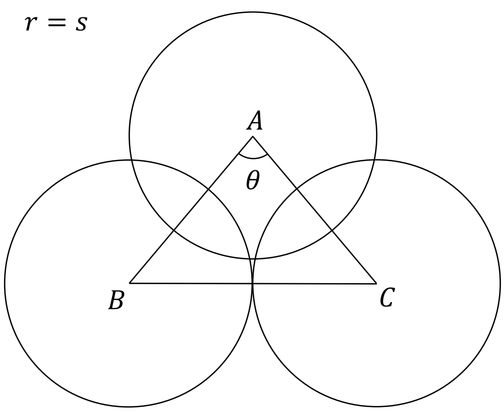


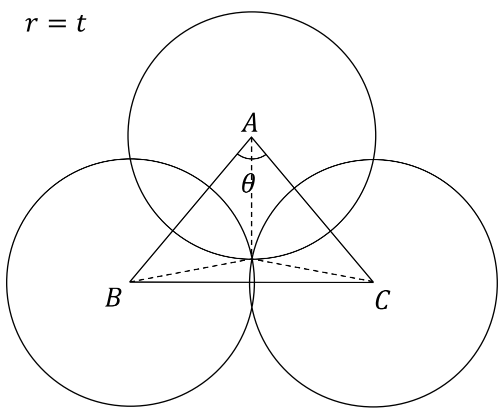


$\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$のとき、$BC > 1$であるから

C_BとC_CがBC上で接するとき、3 辺がD_rに含まれる。　$\therefore s = \sin\dfrac{\theta}{2}$

C_A, C_B, C_Cの円周が、三角形ABCの外心を通るとき、三角形ABCがD_rに含まれる。　$\therefore t = \dfrac{1}{2\cos\dfrac{\theta}{2}}$

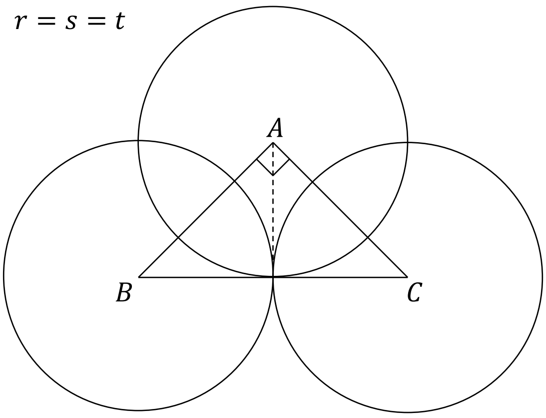




$\theta = \dfrac{\pi}{2}$のとき　三角形ABCの外心はBC上にある。

C_BとC_CがBC上で接し、C_Aが外心を通るとき、3 辺がD_rに含まれ、同時に三角形ABCがD_rに含まれる。

$\therefore s = t = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$



$\theta > \dfrac{\pi}{2}$のとき　三角形ABCの外心は三角形ABCの外部にある。

(2)と同様に考え、C_AとC_Bの円周、C_AとC_cの円周が、それぞれBC上で交差するとき、3 辺がD_rに含まれ、同時に三角形ABCがD_rに含まれる。

$$\therefore s = t = \frac{1}{2\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right)} = \frac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$$

以上により

$0 < \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$のとき　　$s = \dfrac{1}{2}, t = \dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$

$\dfrac{\pi}{3} < \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$のとき　$s = \sin\dfrac{\theta}{2}, t = \dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$ ……(答)

$\theta > \dfrac{\pi}{2}$のとき　　$s = t = \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$