2025年東大文 $\boxed{3}$

(1)

3回の試行でのコインの表裏の出方は、$2^3=8$通り。

コインの表裏の出方と、右から2番目と1番目の玉の並びの変化をすべて書き出すと

表→表→表のとき　○○→○○→○○　表→表→裏のとき　○○→○○→○●

表→裏→表のとき　○○→○●→○○　表→裏→裏のとき　○○→○●→●●

裏→表→表のとき　○●→○○→○○　裏→表→裏のとき　○●→○○→○●

裏→裏→表のとき　○●→●●→●○　裏→裏→裏のとき　○●→●●→●●

これより、求める確率は　$5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{8}$ ……(答)

(2)

n回の試行後、右から2番目と1番目の玉の並びが、「○○」「○●」「●○」「●●」となる確率を、

それぞれa_n,b_n,c_n,d_nとする。$a_1=b_1=\frac{1}{2},c_1=d_1=0$であり、以下の漸化式が成り立つ。

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n \text{ ―― ①} \quad b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n \text{ ―― ②} \quad c_{n+1}=\frac{1}{2}d_n \text{ ―― ③} \quad d_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n+\frac{1}{2}d_n \text{ ―― ④}$$

①＋③より　$a_{n+1}+c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n+c_n+d_n)=\frac{1}{2}$　$\therefore a_n+c_n=\frac{1}{2}$

求める確率は、a_n+b_nである。①＋②より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n=a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-a_n\right)=\frac{1}{2}(a_n+b_n)+\frac{1}{4}$$

$$a_{n+1}+b_{n+1}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(a_n+b_n-\frac{1}{2}\right)\quad a_n+b_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(a_1+b_1-\frac{1}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\therefore a_n+b_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$ ……(答)

(3)

求める確率は、a_nである。(2)より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{2}a_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\quad a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$2^{n+1}\left(a_{n+1}-\frac{1}{3}\right)=-2^n\left(a_n-\frac{1}{3}\right)+1\quad 2^{n+1}\left(a_{n+1}-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}=-\left\{2^n\left(a_n-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\right\}$$

$$2^n\left(a_n-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}=(-1)^{n-1}\left\{2\left(a_1-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{2}\right\}=\frac{1}{6}(-1)^n\quad 2^n\left(a_n-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(-1)^n$$

$$a_n-\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\quad \therefore a_n=\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$ ……(答)