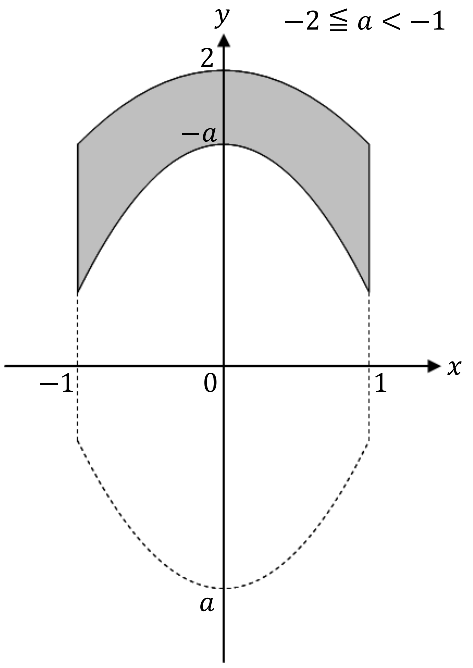
2025 年東大文 $\boxed{4}$

$a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき、$x^2+a \leqq y \leqq= -\dfrac{1}{2}x^2+2, -1 \leqq x \leqq 1$ で表される領域Tの面積$T(a)$は

$$T(a)=\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^2+2-x^2-a\right)dx=2\int_{0}^{1}\left(-\frac{3}{2}x^2+2-a\right)dx=[-x^3+2(2-a)x]_0^1=-2a+3$$

領域Tのうち、$y<0$ の範囲にある部分の面積を$U(a)$とする。



$-2 \leqq a < -1$ のとき

$$U(a)=\int_{-1}^{1}(-x^2-a)dx=2\left[-\frac{x^3}{3}-ax\right]_0^1=-2a-\frac{2}{3}$$

$$S(a)=T(a)-2U(a)=-2a+3+4a+\frac{4}{3}=2a+\frac{13}{3}$$

$-2 \leqq a < -1$ において、$S(a)$は単調増加。

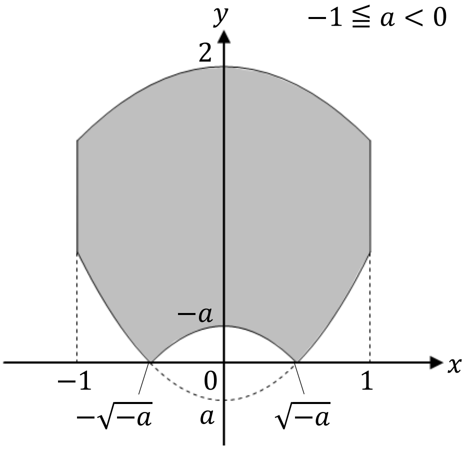
$-1 \leqq a < 0$ のとき

$$U(a)=\int_{-\sqrt{-a}}^{\sqrt{-a}}(-x^2-a)dx=2\left[-\frac{x^3}{3}-ax\right]_0^{\sqrt{-a}}=\frac{4}{3}(-a)^{\frac{2}{2}}$$

$$S(a)=T(a)-2U(a)=-2a+3-\frac{8}{3}(-a)^{\frac{3}{2}}\quad S'(a)=-2+4\sqrt{-a}$$

$-1 \leqq a < 0$ のとき、$S(a)$は$a=-\dfrac{1}{4}$において極大。

a	-1	$\cdots$	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	0
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		↗		↘	

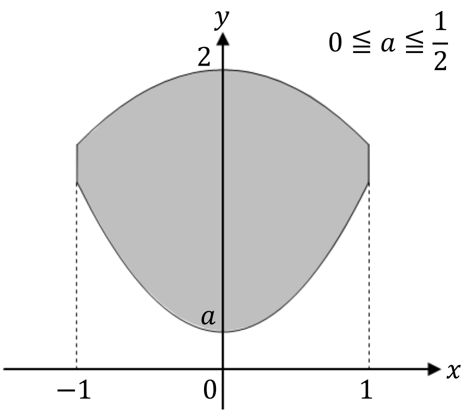


$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$U(a)=0$ であるから、$S(a)=T(a)=-2a+3$

$0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ において、$S(a)$は単調減少。

以降、$\dfrac{1}{2}<a<2$ においても単調減少である。



以上により、$S(a)$の最大値は　$\therefore S\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{1}{2}+3-\dfrac{1}{3}=\dfrac{19}{6}$ $\cdots\cdots$(答)