

(1)

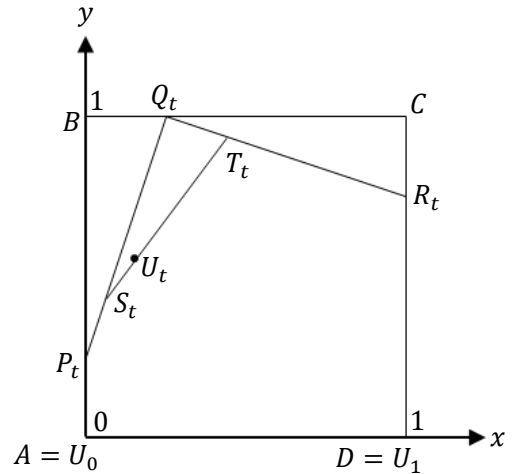
$\overrightarrow{U_0P_t} = (0, t), \overrightarrow{U_0Q_t} = (t, 1), \overrightarrow{U_0R_t} = (1, 1-t)$ であるから

$$\overrightarrow{U_0S_t} = (1-t)\overrightarrow{U_0P_t} + t\overrightarrow{U_0Q_t} = (1-t)\begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t-t^2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{U_0T_t} = (1-t)\overrightarrow{U_0Q_t} + t\overrightarrow{U_0R_t} = (1-t)\begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t-t^2 \\ 1-t^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{U_0U_t} &= (1-t)\overrightarrow{U_0S_t} + t\overrightarrow{U_0T_t} = (1-t)\begin{pmatrix} t^2 \\ 2t-t^2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2t-t^2 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} t^2-t^3+2t^2-t^3 \\ 2t-t^2-2t^2+t^3+t-t^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t^2-2t^3 \\ 3t-3t^3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

U_t の座標は $\therefore (3t^2-2t^3, 3t-3t^3) \dots\dots$ (答)



(2)

$x(t) = 3t^2 - 2t^3$ とすると $x'(t) = 6t - 6t^2 = 6t(1-t)$ $0 \leq t \leq 1$ において $x'(t) \geq 0$ であり、単調増加。

$y(t) = 3t - 3t^2$ とすると $y(t) = -3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ $y(0) = y(1) = 0$ であり、 $t = \frac{1}{2}$ で最大。

求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 y dx &= \int_0^1 (3t - 3t^3)(6t - 6t^2) dt = 18 \int_0^1 t^2(1-t)^2 dt = 18 \int_0^1 (t^2 - 2t^3 + t^4) dt \\ &= 18 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{2} + \frac{t^5}{5} \right]_0^1 = 18 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{3}{5} \dots\dots$$
 (答)

(3)

求める長さは、 $\int_0^a \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2} dt$ で与えられる。

$$\begin{aligned} \{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 &= 36t^2(1-t)^2 + 9(1-2t)^2 = 9\{4t^2(1-t)^2 + (1-2t)^2\} \\ &= 9\{4t^2(1-t)^2 - 4t(1-t) + 1\} = 9\{1 - 2t(1-t)\}^2 = 9(2t^2 - 2t + 1)^2 \end{aligned}$$

$2t^2 - 2t + 1 = 2\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$ であるから

$$\int_0^a \sqrt{\{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2} dt = 3 \int_0^a \sqrt{(2t^2 - 2t + 1)^2} dt = 3 \int_0^a (2t^2 - 2t + 1) dt$$

求める長さは $3 \left[\frac{2}{3}t^3 - t^2 + t \right]_0^a = 2a^3 - 3a^2 + 3a \dots\dots$ (答)