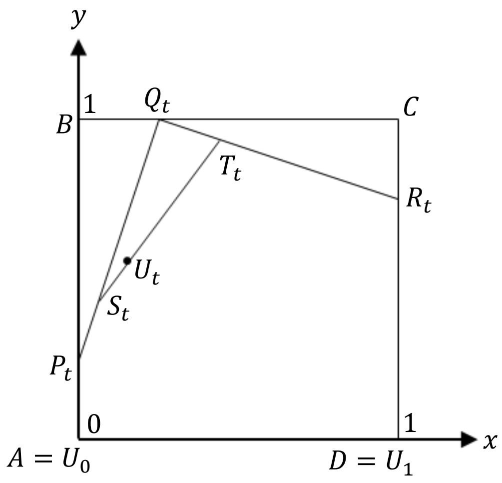
2025 年東大理$\boxed{1}$

(1)



$\overrightarrow{U_0P_t}=(0,t),\overrightarrow{U_0Q_t}=(t,1),\overrightarrow{U_0R_t}=(1,1-t)$であるから

$$\overrightarrow{U_0S_t}=(1-t)\overrightarrow{U_0P_t}+t\overrightarrow{U_0Q_t}=(1-t)\binom{0}{t}+t\binom{t}{1}=\binom{t^2}{2t-t^2}$$

$$\overrightarrow{U_0T_t}=(1-t)\overrightarrow{U_0Q_t}+t\overrightarrow{U_0R_t}=(1-t)\binom{t}{1}+t\binom{1}{1-t}=\binom{2t-t^2}{1-t^2}$$

$$\overrightarrow{U_0U_t}=(1-t)\overrightarrow{U_0S_t}+t\overrightarrow{U_0T_t}=(1-t)\binom{t^2}{2t-t^2}+t\binom{2t-t^2}{1-t^2}$$

$$=\binom{t^2-t^3+2t^2-t^3}{2t-t^2-2t^2+t^3+t-t^3}=\binom{3t^2-2t^3}{3t-3t^3}$$

U_tの座標は　$\therefore(3t^2-2t^3,3t-3t^3)$ ……(答)

(2)

$x(t)=3t^2-2t^3$とすると　$x'(t)=6t-6t^2=6t(1-t)$　$0\leqq t\leqq 1$ において$x'(t)\geqq 0$ であり、単調増加。

$y(t)=3t-3t^2$とすると　$y(t)=-3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$　$y(0)=y(1)=0$ であり、$t=\frac{1}{2}$で最大。

求める面積は

$$\int_0^1 ydx=\int_0^1(3t-3t^3)(6t-6t^2)dt=18\int_0^1 t^2(1-t)^2dt=18\int_0^1(t^2-2t^3+t^4)dt$$

$$=18\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{2}+\frac{t^5}{5}\right]_0^1=18\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\right)=\frac{3}{5}$$ ……(答)

(3)

求める長さは、$\int_0^a\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}dt$ で与えられる。

$$\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2=36t^2(1-t)^2+9(1-2t)^2=9\{4t^2(1-t)^2+(1-2t)^2\}$$
$$=9\{4t^2(1-t)^2-4t(1-t)+1\}=9\{1-2t(1-t)\}^2=9(2t^2-2t+1)^2$$

$2t^2-2t+1=2\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}>0$ であるから

$$\int_0^a\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}dt=3\int_0^a\sqrt{(2t^2-2t+1)^2}dt=3\int_0^a(2t^2-2t+1)dt$$

求める長さは　$3\left[\frac{2}{3}t^3-t^2+t\right]_0^a=2a^3-3a^2+3a$ ……(答)