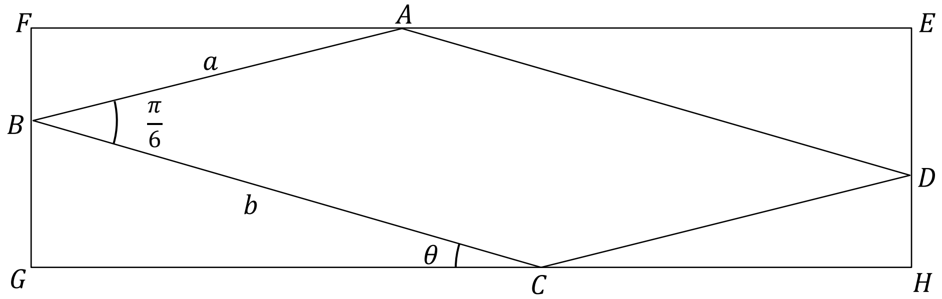
2025 年東大理 $\boxed{3}$

(1)



$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}, \angle DAE = \angle BCG = \theta, \angle BAD = \dfrac{5}{6}\pi$ より　$\angle BAF = \pi - \dfrac{5}{6}\pi - \theta = \dfrac{\pi}{6} - \theta$

$BG = b\sin\theta, GC = b\cos\theta$

$FB = a\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \theta\right) = \dfrac{a}{2}\left(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta\right), FA = a\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \theta\right) = \dfrac{a}{2}(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta)$

$GH = GC + CH = GC + FA = b\cos\theta + \dfrac{a}{2}(\sqrt{3}\cos\theta + \sin\theta) = \dfrac{a}{2}\sin\theta + \left(b + \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)\cos\theta$

$FG = FB + BG = \dfrac{a}{2}\left(\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta\right) + b\sin\theta = \left(b - \dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)\sin\theta + \dfrac{a}{2}\cos\theta$

$$S = FG \cdot GH = \left\{\left(b - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\sin\theta + \frac{a}{2}\cos\theta\right\}\left\{\frac{a}{2}\sin\theta + \left(b + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\cos\theta\right\}$$

$$= \frac{a}{2}\left(b - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\sin^2\theta + \frac{a}{2}\left(b + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)\cos^2\theta + \left\{\frac{a^2}{4} + \left(b^2 - \frac{3}{4}a^2\right)\right\}\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{a}{4}\left(b - \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)(1 - \cos 2\theta) + \frac{a}{4}\left(b + \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)(1 + \cos 2\theta) + \frac{1}{2}\left(b^2 - \frac{1}{2}a^2\right)\sin 2\theta$$

$$= \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}(2b^2 - a^2)\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cos 2\theta \quad \cdots\cdots (\text{答})$$

(2)

$(2b^2 - a^2)^2 + \left(\sqrt{3}a^2\right) = 4(a^4 - a^2b^2 + b^4)$

$$S = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}\left(\frac{2b^2 - a^2}{2\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}a^2}{2\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}}\cos 2\theta\right)$$

$2b^2 - a^2 > 0, \sqrt{3}a^2 > 0$ であるから、$\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{2b^2 - a^2}$ となる$\alpha\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$が存在する。

$$\therefore S = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}(\sin 2\theta\cos\alpha + \cos 2\theta\sin\alpha) = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}\sin(2\theta + \alpha)$$

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ より $\alpha \leqq 2\theta + \alpha \leqq \dfrac{\pi}{3} + \alpha$　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{3} + \alpha$であれば、$2\theta + \alpha = \dfrac{\pi}{2}$ となるθが存在する。

$\theta = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\alpha}{2}$ のとき、Sは最大値$\dfrac{1}{2}ab + \dfrac{1}{2}\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}$をとる。

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{3} + \alpha$となる条件を考える。$\alpha \geqq \dfrac{\pi}{6}$であるから　$\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{3}a^2}{2b^2 - a^2} \geqq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$3a^2 \geqq 2b^2 - a^2$　$4a^2 \geqq 2b^2$　$\therefore b \leqq \sqrt{2}a$

$a \leqq b \leqq \sqrt{2}a$のとき、$S$の最大値は$\dfrac{1}{2}ab + \dfrac{1}{2}\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}$である。

$b > \sqrt{2}a$のとき、$2\theta + \alpha \leqq \dfrac{\pi}{3} + \alpha < \dfrac{\pi}{2}$であるから、$S$は$\theta = \dfrac{\pi}{6}$のとき最大値をとる。このとき

$$S = \frac{1}{2}ab + \frac{1}{4}(2b^2 - a^2)\sin\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}a^2\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}ab + \frac{\sqrt{3}}{8}(2b^2 - a^2) + \frac{\sqrt{3}}{8}a^2 = \frac{1}{2}ab + \frac{\sqrt{3}}{4}b^2$$

Sの最大値は　$a \leqq b \leqq \sqrt{2}a$のとき$\dfrac{1}{2}ab + \dfrac{1}{2}\sqrt{a^4 - a^2b^2 + b^4}$、$b > \sqrt{2}a$のとき$\dfrac{1}{2}ab + \dfrac{\sqrt{3}}{4}b^2$ ……(答)