2025年東大理$\boxed{4}$

(1)

$n > a$のときを考え、$n = a + b$とする。bは自然数である。

$f_a(a+b) = (a+b)^2 + (a+b) - a = (a+b)^2 + b > (a+b)^2$

$(a+b+1)^2 - f_a(a+b) = 2(a+b) + 1 - (a+b) + a = 2a + b + 1 > 0$

$(a+b)^2 < f_a(a+b) < (a+b+1)^2$であり、$f_a(a+b)$は隣接した平方数の間の数である。

したがって、$n > a$のとき、$f_a(n)$は平方数にはなり得ないから、$n \leqq a$でなければならない。(証明終)

(2)

$f_a(a) = a^2 + a - a = a^2$より、$n = a$は必ず題意を満たす。

「(ii)ならば(i)」を示す。$f_a(n)$が平方数であるとき、$f_a(n) = m^2$とすると

$n^2 + n - a = m^2 \quad a = n^2 + n - m^2 \quad 4a + 1 = 4n^2 + 4n + 1 - 4m^2 = (2n+1)^2 - (2m)^2$

$\therefore 4a + 1 = (2n + 1 + 2m)(2n + 1 - 2m)$ ──①

$4a+1$が素数であるとき、①より、$2n + 1 + 2m = 4a + 1, 2n + 1 - 2m = 1$しかあり得ないから

$n + m = 2a, n - m = 0 \quad \therefore n = m = a$

したがって、$f_a(n)$が平方数になるnは、$n = a$のみであるから　$\therefore N_a = 1$

「(i)ならば(ii)」を示す。対偶「(ii)ではないならば(i)ではない」を示せばよい。

$4a+1$が素数ではないとき、$4a+1$は1ではない奇数の積で表される。

$4a + 1 = (2p+1)(2q+1)$とする。ただし、$p \geqq q$である。①より

$2n + 1 + 2m = 2p + 1, 2n + 1 - 2m = 2q + 1 \quad n + m = p, n - m = q \quad \therefore n = \dfrac{p+q}{2}, m = \dfrac{p-q}{2}$

ここで　$4a + 1 = (2p+1)(2q+1) = 4pq + 2(p+q) + 1 \quad a = pq + \dfrac{p+q}{2}$

aは整数であるから、pとqの奇偶は一致し、$\dfrac{p+q}{2}$は整数である。

$n = \dfrac{p+q}{2} = a - pq$のとき、$f_a(n)$は平方数$\left(\dfrac{p-q}{2}\right)^2$となる。

$4a+1$が素数ではないとき、$f_a(n)$が平方数になるnは2個以上存在し、$N_a = 1$ではない。

以上により、「(i)ならば(ii)」と「(ii)ならば(i)」の両方が成立するから、(i)と(ii)は同値である。(証明終)