2025年東大理 $\boxed{6}$

(1)

$z=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos\theta\right)+i\frac{1}{2}\sin\theta$ とおける。$0\leqq\theta<2\pi,\theta\neq\pi$である。

$$\frac{1}{z}=\frac{2}{(1+\cos\theta)+i\sin\theta}=\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}=\frac{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}\right)}=1-i\tan\frac{\theta}{2}$$

したがって、$\frac{1}{z}$の実部は1である。　(証明終)

(2)

(1)より、$\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\beta}$の実部は1であり、虚部はすべての実数をとり得る。

$\frac{1}{\alpha}=1+ia,\frac{1}{\beta}=1+ib$とする。$a,b$は任意の実数であり、$a\neq b$である。

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=1-a^2+i2a+1-b^2+i2b=2-(a^2+b^2)+i2(a+b)$$

$x=2-(a^2+b^2),y=2(a+b)$とおくと　$a+b=\frac{y}{2}$ ──①　$a^2+b^2=2-x>0$ より　$\therefore x<2$

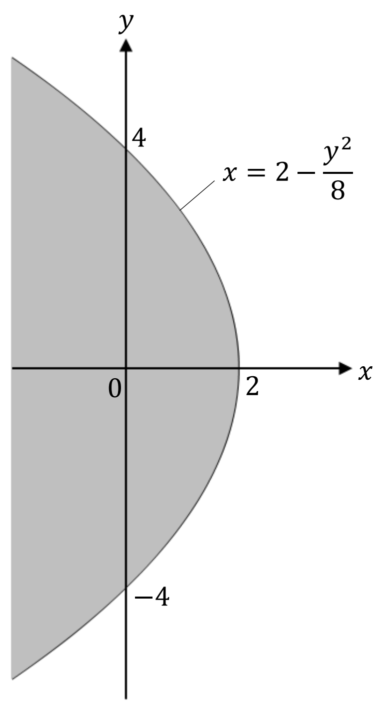
$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab=\frac{y^2}{4}-2ab=2-x\quad 2ab=\frac{y^2}{4}+x-2\quad ab=\frac{y^2}{8}+\frac{x}{2}-1 \text{──②}$$

①②より、$a,b$は2次方程式$t^2-\frac{y}{2}t+\frac{y^2}{8}+\frac{x}{2}-1=0$ の相違なる2実数解であるから

$$D=\frac{y^2}{4}-4\left(\frac{y^2}{8}+\frac{x}{2}-1\right)=-\frac{y^2}{4}-2x+4>0$$

$$\therefore x<2-\frac{y^2}{8}$$

図示すると右図の通りで、$x<2$ を満たす。
境界線を含まない。




(3)

$\gamma=x+iy$とすると　$\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$

$x\geqq 2-\frac{y^2}{8}$ の条件下で、$R=\frac{x}{x^2+y^2}$ の最大値、最小値を考える。

$x\geqq 2$ のとき　$x$を固定して考えると、$R$は$y=0$ のとき最大値$\frac{1}{x}$をとる。

$x\geqq 2$ のとき　$\therefore 0<R\leqq\frac{1}{2}$

$0 < x < 2$ のとき　$y^2 \geqq 8(2-x)$より

$x$を固定して考えると、$R$は$y^2 = 8(2-x)$のとき最大値$\dfrac{x}{x^2+8(2-x)} = \dfrac{x}{(x-4)^2}$をとる。

$f(x) = \dfrac{x}{(x-4)^2}$とすると　$f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x-4)^2 - x \cdot 2(x-4)}{(x-4)^4} = -\dfrac{x+4}{(x-4)^3} > 0$

$0 < x < 2$ のとき、$f(x)$は単調増加。　$\therefore 0 < R < \dfrac{1}{2}$

$x = 0$ のとき、$y$に関わらず$R = 0$。

$x < 0$ のとき　$R < 0$ である。

$x$を固定して考えると、$R$は$y^2 = 8(2-x)$のとき最小値$\dfrac{x}{(x-4)^2}$をとる。

$f(x) = \dfrac{x}{(x-4)^2}$とすると　$f'(x) = -\dfrac{x+4}{(x-4)^3}$より、増減は右の通り。

| $x$ | $\cdots$ | $-4$ | $\cdots$ | $0$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ | |

$x = -4$ のとき、$R$は最小値$f(-4) = -\dfrac{1}{16}$をとる。

$x < 0$ とき　$\therefore -\dfrac{1}{16} \leqq R < 0$

以上により　$\therefore -\dfrac{1}{16} \leqq R \leqq \dfrac{1}{2}$　最大値は$\dfrac{1}{2}$、最小値は$-\dfrac{1}{16}$ $\cdots\cdots$(答)