2026年東大文$\boxed{3}$

(1)

$x \geqq 4$ において$f(x)$は単調増加であり、$f(x) \geqq f(4) = \dfrac{9a}{8} + \dfrac{2}{a} - 3$

$h_4(a) = f(4) = \dfrac{9a}{8} + \dfrac{2}{a} - 3$ とすると　$h_4{}'(a) = \dfrac{9}{8} - \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{9a^2 - 16}{8a^2} = \dfrac{(3a+4)(3a-4)}{8a^2}$

$0 < a < 1$ において$h_4{}'(a) < 0$ であるから　$h_4(1) = \dfrac{1}{8}$　$\displaystyle\lim_{a \to +0} h_4(a) = +\infty$　$\therefore f(4) > \dfrac{1}{8}$

$g(x)$のグラフはのこぎり型になり、$g(4) = 0, g(5) = 1$ である。

$h_5(a) = f(5) = 2a + \dfrac{2}{a} - 3$ とすると　$h_5{}'(a) = 2 - \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{2(a+1)(a-1)}{a^2}$

$0 < a < 1$ において$h_5{}'(a) < 0$ であるから　$h_5(1) = 1$　$\displaystyle\lim_{a \to +0} h_5(a) = +\infty$　$\therefore f(5) > 1$

$4 \leqq x \leqq 5$ において$g'(x) = 1$。$f'(x) = \dfrac{a}{4}(x-1)$より、$\dfrac{3}{4}a \leqq f'(x) \leqq a < 1$

$y = f(x)$と$y = g(x)$は、$4 < x < 5$ において共有点を持たない。

以上により、$x \geqq 4$ において　$\therefore f(x) > g(x)$　(証明終)

(2)

$y = f(x)$の頂点のy座標$\dfrac{2}{a} - 3$ は、$\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{2}{3}$において単調減少で、$0 < \dfrac{2}{a} - 3 < 1$ である。

$h_3(a) = f(3) = \dfrac{a}{2} + \dfrac{2}{a} - 3$ とすると　$h_3{}'(a) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{a^2} = \dfrac{a^2 - 2}{2a^2} = \dfrac{(a+\sqrt{2})(a-\sqrt{2})}{2a^2}$

$f(3)$は、$\dfrac{1}{2} < a < \dfrac{2}{3}$において$h_3{}'(a) < 0$ であるから単調減少で、$\dfrac{1}{3} < f(3) < \dfrac{5}{4}$である。

$f(3) = 1$ となるaを求める。$\dfrac{a}{2} + \dfrac{2}{a} - 3 = 1$ より　$a^2 - 8a + 4 = 0$　$a > 0$ より　$\therefore a = 4 - 2\sqrt{3}$

$$4 - 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} = \frac{7 - 4\sqrt{3}}{2} = \frac{49 - 48}{2\left(7 + 4\sqrt{3}\right)} > 0 \quad \frac{2}{3} - (4 - 2\sqrt{3}) = \frac{2(3\sqrt{3} - 5)}{3} = \frac{2(27 - 25)}{3\left(3\sqrt{3} + 5\right)} > 0$$

$\dfrac{1}{2} < 4 - 2\sqrt{3} < \dfrac{2}{3}$であり、グラフより、求める共有点の個数は
$$\begin{cases} \dfrac{1}{2} < a < 4 - 2\sqrt{3}\text{のとき} & 2\text{個} \\ a = 4 - 2\sqrt{3}\text{のとき} & 3\text{個} \\ 4 - 2\sqrt{3} < a < \dfrac{2}{3}\text{のとき} & 4\text{個} \end{cases} \cdots\cdots(\text{答})$$