2026 年東大文 $\boxed{4}$

(1)

$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{6}$より、$-\dfrac{\pi}{6}<\theta+\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{\pi}{2}$であるから、$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$が存在する。

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\theta+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\theta\tan\frac{\pi}{3}}=\frac{\tan\theta+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan\theta}\ \cdots\cdots(\text{答})$$

(2)

$f(x)=x^3-kx$とすると　$f'(x)=3x^2-k$　Oにおける接線の傾きは$f'(0)=-k$

$-k=\tan\alpha$とする。他の 2 接線の傾きは$\tan\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right),\tan\left(\alpha+\dfrac{2}{3}\pi\right)$で与えられる。

$$\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\tan\alpha}=\frac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k}\quad \tan\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\tan\alpha-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\tan\alpha}=\frac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}k}$$

$3x^2-k=\dfrac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k}$とすると　$3x^2=\dfrac{-k+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}k}+k=\dfrac{-k+\sqrt{3}+k\left(1+\sqrt{3}k\right)}{1+\sqrt{3}k}=\dfrac{\sqrt{3}(1+k^2)}{1+\sqrt{3}k}>0$

$3x^2-k=\dfrac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}k}$とすると　$3x^2=\dfrac{-k-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}k}+k=\dfrac{-k-\sqrt{3}+k\left(1-\sqrt{3}k\right)}{1-\sqrt{3}k}=\dfrac{\sqrt{3}(1+k^2)}{\sqrt{3}k-1}>0$

求める条件は　$1+\sqrt{3}k>0$ かつ$\sqrt{3}k-1>0$　結局、$\therefore k>\dfrac{\sqrt{3}}{3}\ \cdots\cdots(\text{答})$

(3)

P,Qのx座標をそれぞれ$p,q\,(p<q)$とする。

Pにおける接線l_pの方程式は　$y=(3p^2-k)(x-p)+p^3-kp=(3p^2-k)x-2p^3$

同様に、Qにおける接線l_qの方程式は　$y=(3q^2-k)x-2q^3$

Oにおける接線$y=-kx$と、l_p,l_qの交点は、それぞれ$\left(\dfrac{2}{3}p,-\dfrac{2}{3}kp\right),\left(\dfrac{2}{3}q,-\dfrac{2}{3}kq\right)$となる。

三角形OPQの 1 辺の長さの 2 乗は　$\dfrac{4}{9}(q-p)^2+\dfrac{4}{9}k^2(q-p)^2=\dfrac{4}{9}(1+k^2)(q-p)^2$

三角形OPQの面積は　$S=\dfrac{\sqrt{3}}{9}(1+k^2)(q-p)^2$　$(q-p)^2$の値について考える。

$0<p<q$のとき　$q=\sqrt{\dfrac{1+k^2}{3k-\sqrt{3}}},p=\sqrt{\dfrac{1+k^2}{3k+\sqrt{3}}}$

$$(q-p)^2=\frac{1+k^2}{3k-\sqrt{3}}+\frac{1+k^2}{3k+\sqrt{3}}-\frac{2(1+k^2)}{\sqrt{9k^2-3}}=(1+k^2)\left(\frac{6k}{9k^2-3}-\frac{2}{\sqrt{3(3k^2-1)}}\right)$$

$$=\frac{2(1+k^2)}{\sqrt{3}(3k^2-1)}\left(\sqrt{3}k-\sqrt{3k^2-1}\right)$$

$p<q<0$ のとき　$q=-\sqrt{\dfrac{1+k^2}{3k+\sqrt{3}}}, p=-\sqrt{\dfrac{1+k^2}{3k-\sqrt{3}}}$

$0<p<q$のときと$q-p$の値は同じ。

$p<0<q$のとき　$q=\sqrt{\dfrac{1+k^2}{3k+\sqrt{3}}}, p=-\sqrt{\dfrac{1+k^2}{3k-\sqrt{3}}}$　または　$q=\sqrt{\dfrac{1+k^2}{3k-\sqrt{3}}}, p=-\sqrt{\dfrac{1+k^2}{3k+\sqrt{3}}}$

いずれの場合も$q-p$の値は同じ。

$$(q-p)^2=\frac{1+k^2}{3k-\sqrt{3}}+\frac{1+k^2}{3k+\sqrt{3}}+\frac{2(1+k^2)}{\sqrt{9k^2-3}}=(1+k^2)\left(\frac{6k}{9k^2-3}+\frac{2}{\sqrt{3(3k^2-1)}}\right)$$

$$=\frac{2(1+k^2)}{\sqrt{3}(3k^2-1)}\left(\sqrt{3}k+\sqrt{3k^2-1}\right)$$

以上により　$\therefore M=\dfrac{2(1+k^2)^2}{9(3k^2-1)}\left(\sqrt{3}k+\sqrt{3k^2-1}\right), m=\dfrac{2(1+k^2)^2}{9(3k^2-1)}\left(\sqrt{3}k-\sqrt{3k^2-1}\right)$

$M=4m$のとき　$\sqrt{3}k+\sqrt{3k^2-1}=4\left(\sqrt{3}k-\sqrt{3k^2-1}\right)$　$3\sqrt{3}k=5\sqrt{3k^2-1}$

$27k^2=25(3k^2-1)$　$48k^2=25$　$k^2=\dfrac{25}{48}$　$k>0$ より　$k=\dfrac{5}{4\sqrt{3}}=\dfrac{5}{12}\sqrt{3}$

これは$k>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$を満たすから　$\therefore k=\dfrac{5}{12}\sqrt{3}$ ……(答)

※理系$\boxed{4}$には(1)がない。(2), (3)は理系$\boxed{4}$の(1), (2)と共通。