2026年東大理$\boxed{3}$

(1)

P, Qはxy平面上の円$x^2+y^2=25$ 上の点である。$P(a,b,0), Q(c,d,0)$とする。また、$R(u,v,w)$とする。

PQの中点Mを$(s,t,0)$とすると　$s=\dfrac{a+c}{2}, t=\dfrac{b+d}{2}$

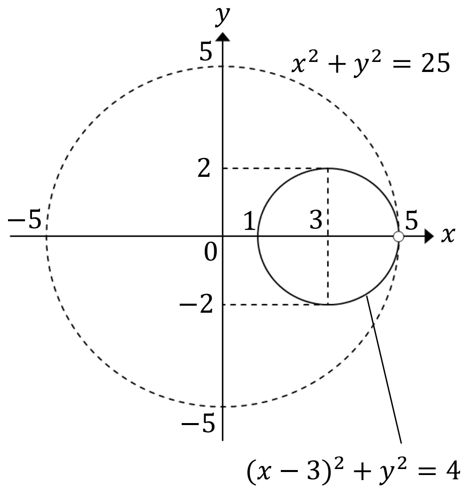
三角形PQRの重心が$(2,0,1)$であることから

$$\frac{a+c+u}{3}=\frac{2s+u}{3}=2, \frac{b+d+v}{3}=\frac{2t+v}{3}=0, \frac{w}{3}=1 \quad \therefore u=6-2s, v=-2t, w=3 \text{——①}$$

①を$u^2+v^2+w^2=25$ に代入すると

$$(6-2s)^2+4t^2+9=25 \quad 4(s-3)^2+4t^2=16 \quad \therefore (s-3)^2+t^2=4$$

Mはxy平面上の円$(x-3)^2+y^2=4$ 上を動く。



ここで、点$(5,0)$は円$x^2+y^2=25$ 上の点である。$P \neq Q$であるから、
Mは円$x^2+y^2=25$ 上の点ではない。
求めるMの軌跡は、xy平面上の円$(x-3)^2+y^2=4$ から点$(5,0)$を
除いた部分である。図示すると右の通り。

(2)

原点をOとすると、PQはOMと垂直である。

$M(s,t)$とする。$t \neq 0$ とすると、OMの傾きは$\dfrac{t}{s}$、PQの傾きは$-\dfrac{s}{t}$となる。

PQの方程式は　$y=-\dfrac{s}{t}(x-s)+t \quad \therefore sx+ty=s^2+t^2$ ——②　これは$t=0$ でも成立する。

$s=3+2\cos\theta, y=2\sin\theta$ とおけるので、②に代入すると

$$(3+2\cos\theta)x+(2\sin\theta)y=9+4+12\cos\theta=13+12\cos\theta$$

$$2(x-6)\cos\theta+2y\sin\theta=13-3x$$

$$2(x-6)\cos\theta+2y\sin\theta=2\sqrt{(x-6)^2+y^2}\sin(\theta+\alpha) \left(\sin\alpha=\frac{x-6}{\sqrt{(x-6)^2+y^2}}, \cos\alpha=\frac{y}{\sqrt{(x-6)^2+y^2}}\right)$$

$$\sin(\theta+\alpha)=\frac{13-3x}{2\sqrt{(x-6)^2+y^2}} \quad |\sin(\theta+\alpha)|=\frac{|13-3x|}{2\sqrt{(x-6)^2+y^2}} \leqq 1 \quad |13-3x| \leqq 2\sqrt{(x-6)^2+y^2}$$

両辺を 2 乗すると

$$|13-3x|^2=169-78x+9x^2 \leqq 4(x^2-12x+36+y^2) \quad 5x^2-30x+25-4y^2 \leqq 0$$

$$5(x-3)^2-4y^2 \leqq 20 \quad \therefore \frac{(x-3)^2}{4}-\frac{y^2}{5} \leqq 1$$

双曲線$\dfrac{(x-3)^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$ と円$x^2+y^2=25$ の交点を求める。

$$x^2+\frac{5(x-3)^2}{4}-5=25 \quad 4x^2+5(x^2-6x+9)-120=9x^2-30x-75=0$$

$$3x^2 - 10x - 25 = (3x+5)(x-5) = 0 \quad \therefore x = -\frac{5}{3}, 5$$

$x = -\dfrac{5}{3}$のとき　$y^2 = 25 - \dfrac{25}{9} = \dfrac{200}{9}$　$\therefore y = \pm\dfrac{10\sqrt{2}}{3}$

PQが動く範囲は、$\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} \leqq 1$ かつ$x^2 + y^2 \leqq 25$ である。

ただし、点$(5, 0)$は除く。

図示すると右の通り。

点$(5, 0)$以外の境界線を含む。