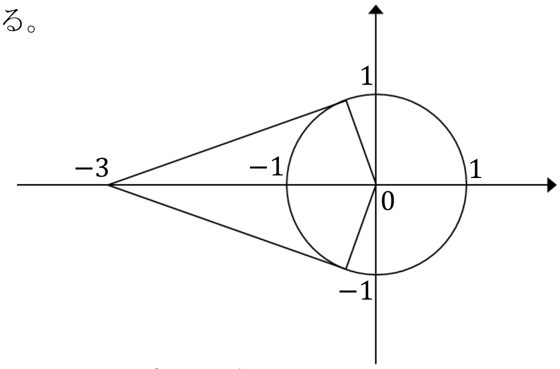
2026 年東大理 $\boxed{5}$

(1)

$z-\alpha$の偏角をβとすると、$w=(z-\alpha)^3$の偏角は$\theta=3\beta$となる。



複素数平面上で、-3 を通るCの接線を考えると、

$\sin\beta$ がとり得る範囲は、$-\dfrac{1}{3}\leqq\sin\beta\leqq\dfrac{1}{3}$ である。

$\sin\theta=\sin 3\beta=3\sin\beta-4\sin^3\beta$ であるから、

$f(t)=3t-4t^3$の、$-\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq\dfrac{1}{3}$における増減を考える。

$f'(t)=3-12t^2=3(1+2t)(1-2t)$　$-\dfrac{1}{3}\leqq t\leqq\dfrac{1}{3}$において$f'(t)>0$ であるから

$$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-1+\frac{4}{27}=-\frac{23}{27}\quad f\left(\frac{1}{3}\right)=1-\frac{4}{27}=\frac{23}{27}\qquad \therefore -\frac{23}{27}\leqq\sin\theta\leqq\frac{23}{27}\ \cdots\cdots(\text{答})$$

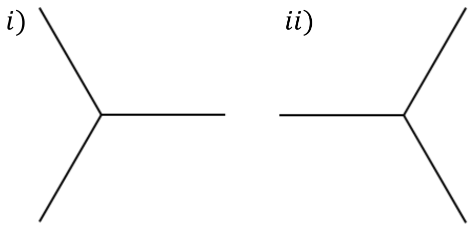
(2)

$\sin\theta=\sin 3\beta=0$ となる条件を考える。$0\leqq\beta<2\pi$とする。

$$\sin\theta=\sin 3\beta=\sin\beta\,(3-4\sin^2\beta)=0\quad \sin\beta=0,\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\quad \therefore\beta=0,\frac{\pi}{3},\frac{2}{3}\pi,\pi,\frac{4}{3}\pi,\frac{5}{3}\pi$$

このとき、$\cos\theta=\cos 3\beta$ は　$\beta=0,\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{4}{3}\pi$のとき $\cos\theta=1$　$\beta=\dfrac{\pi}{3},\pi,\dfrac{5}{3}\pi$のとき $\cos\theta=-1$

下記の$i),ii)$が、同時に成立することが条件である。



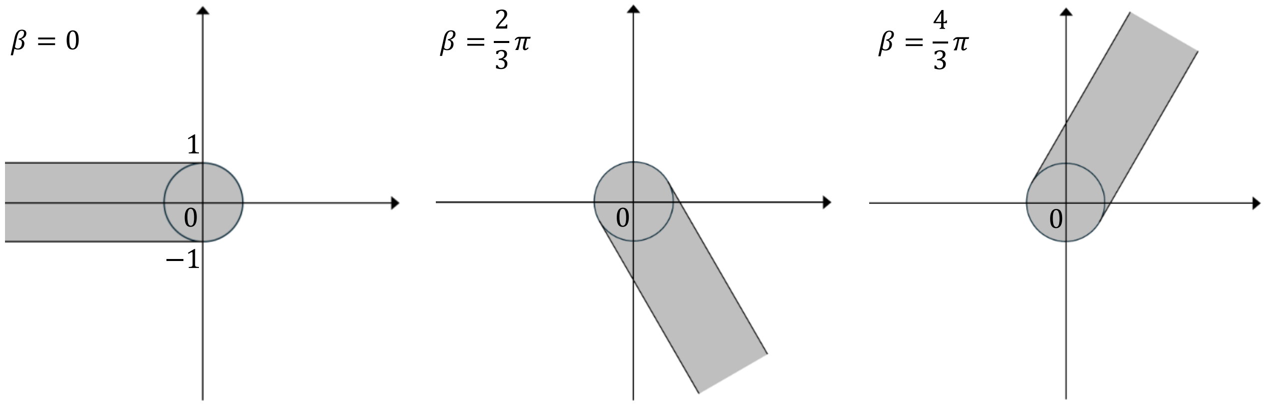
$i)$ $z-\alpha$の偏角が 0 か$\dfrac{2}{3}\pi$か$\dfrac{4}{3}\pi$になるzが存在する。

$ii)$ $z-\alpha$の偏角が$\dfrac{\pi}{3}$かπか$\dfrac{5}{3}\pi$になるzが存在する。

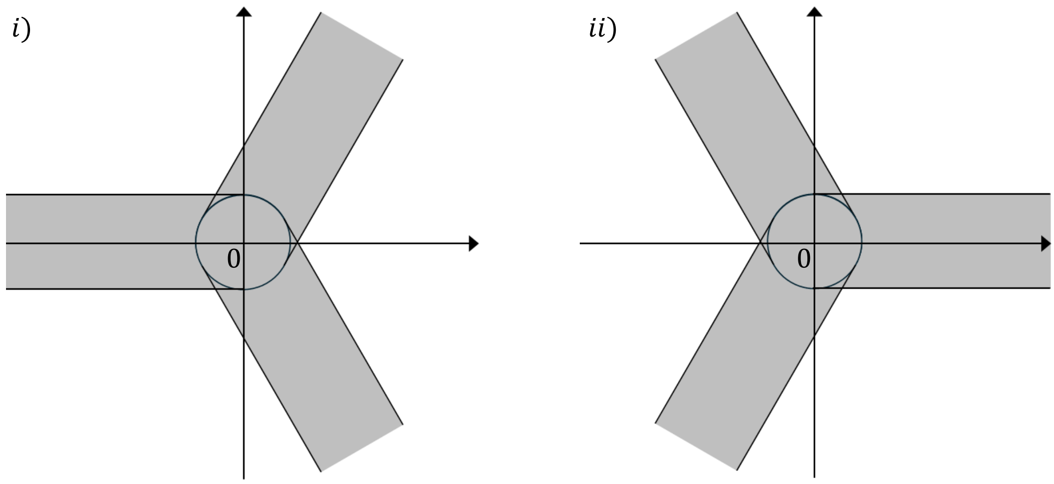
αを固定したとき、$i),ii)$が成立する条件は、右図のように、zを表す点が$R(\alpha)$を起点とした 3 本の半直線上に存在するときである。

例えば、$z-\alpha$の偏角βが 0 になる条件を考える。αの存在範囲は、Cの 2 本の接線で挟まれた領域のうち、Cから見て左側およびCの内部である。境界線のうち、円弧部分は含まない。

同様に考えて、$\beta=0,\dfrac{2}{3}\pi,\dfrac{4}{3}\pi$となる$z$が存在する$\alpha$の存在範囲は、それぞれ下図の通り。



$i)$の範囲はこれらの和である。 $ii)$についても同様に考え、下図のようになる。境界線を含む。



$R(\alpha)$が動き得る範囲は、$i)$の範囲と $ii)$の範囲の共通範囲であるから、下図の通り。境界線を含む。
この面積は、Cに外接する正六角形の面積の 2 倍である。

正六角形の 1 辺の長さは$\dfrac{2}{\sqrt{3}}$であるから、求める面積は

$$\therefore 12 \times \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = 4\sqrt{3} \cdots\cdots (答)$$